

Représentation diffusive et application à quelques problèmes dynamiques

C. CASENAVE¹, G. MONTSENY¹

¹Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, LAAS -CNRS, Toulouse

Sommaire

1. Représentation diffusive
 - Introduction
 - Inversion γ -symbolique
 - Opérateurs matriciels
2. Applications

Introduction à la représentation diffusive

1. Introduction
2. Principe
3. Résultat fondamental
4. Cadre topologique
5. Approximations numériques

Ref: G.Montseny, *Représentation Diffusive*, Hermes-science, juillet 2005

Représentation diffusive

Introduction (1)

De manière générale, les problèmes dynamiques font intervenir des **opérateurs dynamiques** (i.e. causaux).

Une classe à la fois riche et relativement simple d'opérateurs dynamiques est constituée des opérateurs obtenus par "combinaisons", au moyen des opérations standard $+$, $.$, \circ , d'opérateurs élémentaires de deux type:

- statiques non linéaires, i.e. les fonctions ordinaires (de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m),
- **dynamiques linéaires**: opérateurs intégraux de la forme:

$$u \mapsto \mathcal{H}u, \quad (\mathcal{H}u)(t) = \int h(t, t-s) u(s) ds.$$

Représentation diffuse

Introduction (2)

Difficulté majeure inhérente aux opérateurs intégraux: la complexité (en particulier numérique) est a priori excessive (particulièrement sous les aspects temps réel).

D'où les contraintes:

1. nécessité d'une classe d'opérateurs linéaires intégraux admettant une **formulation t -locale** (réalisation d'état) compatible avec les aspects numériques.
2. Les opérations standard $(+, \cdot, \circ)$ doivent pouvoir être utilisées \Rightarrow nécessité d'une **algèbre d'opérateurs**.

Une telle algèbre est nécessairement de dimension infinie.

Représentation diffusive

Introduction (3)

⇒ nécessité de construction d'espaces vectoriels topologiques (complets) d'opérateurs intégraux tels que:

- il existe une transformation $u \mapsto \psi_u$ à réalisation t -locale telle que:

$$\forall \mathcal{H}, \exists \mu_{\mathcal{H}}, \forall t, (\mathcal{H}u)(t) = \mu_{\mathcal{H}}(\psi_u(t))$$

- la composition d'opérateurs est une **opération interne et continue**,
- les **approximations** en dimension finie sont possibles et **praticables** (via réalisations approchées de ψ_u).

La représentation diffusive est le cadre mathématique adapté à cette problématique générale.

Représentation diffusive

Principe (1)

Opérateur dynamique linéaire:

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}u)(t) &= \int_{\mathbb{R}} h(t, t-s)u(s)ds = (h(t, \cdot) * u)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t, s)\mathbf{u}(t, s)ds \text{ où } \mathbf{u}(t, s) := u(t-s) \text{ (histoire de } u) \\ &= \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle \text{ où } \langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(s)g(s)ds\end{aligned}$$

Représentation diffusive

Principe (1)

Opérateur dynamique linéaire:

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}u)(t) &= \int_{\mathbb{R}} h(t, t-s)u(s)ds = (h(t, \cdot) * u)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t, s)\mathbf{u}(t, s)ds \text{ où } \mathbf{u}(t, s) := u(t-s) \text{ (histoire de } u) \\ &= \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle \text{ où } \langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(s)g(s)ds\end{aligned}$$

Avantages de cette formulation:

- produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indépendant de t
- à t fixé, $h(t, \cdot)$ et $\mathbf{u}(t, \cdot)$ sont des fonctions d'une variable temps $s \in \mathbb{R}$

$\implies \left\{ \begin{array}{l} \text{permet des transformations riches en propriétés intéressantes} \\ \text{cadre algébrico-topologique clair basé sur des dualités topologiques} \end{array} \right.$

Représentation diffusive

Principe (2)

Soit \mathcal{A} une transformation linéaire inversible. Formellement:

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A}u(t, \cdot) \rangle. \quad (1)$$

En transposant \mathcal{A}^{-1} sur $h(t, \cdot)$ via son adjoint formel:

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle (\mathcal{A}^{-1})^* h(t, \cdot), \mathcal{A}u(t, \cdot) \rangle, \quad (2)$$

soit encore:

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle \text{ avec } \begin{cases} \psi(t, \cdot) = \mathcal{A}u(t, \cdot) \\ \mu(t, \cdot) = (\mathcal{A}^*)^{-1} h(t, \cdot). \end{cases}$$

\implies $\left\{ \begin{array}{l} \text{nombreuses formulations de l'opérateur} \\ \text{séparation de ce qui se rapporte à } \mathcal{H} \text{ et de ce qui se rapporte à } u \end{array} \right.$

Le passage de (1) à (2) doit être justifié.

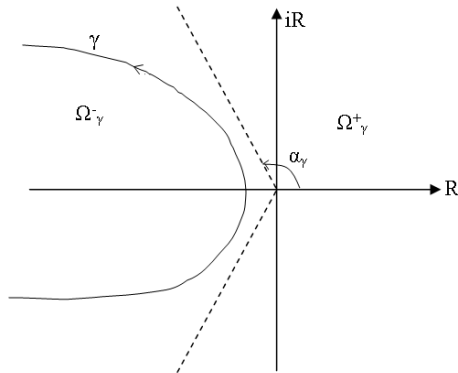
Représentation diffusive

Principe (3)

On considère la transformation \mathcal{A} définie par:

$$(\mathcal{A}u(t, \cdot))(\xi) = ((\partial_t - \gamma(\xi)I)^{-1}u)(t) = (\mathfrak{R}d_\gamma u)(t, \xi),$$

où $\gamma \subset \mathbb{R}_- + i\mathbb{R}$ est un contour défini par un arc simple fermé (éventuellement à l'infini) qui sépare \mathbb{C} en deux sous-espaces connexes disjoints notés Ω_γ^+ et Ω_γ^- et qui vérifie certaines hypothèses.



Représentation diffusive

Principe (4)

Propriété fondamentale: Pour toute u à support dans $[t_0, \infty[$, la γ -représentation $\mathfrak{R}d_\gamma u = (\mathcal{A}u(t, \cdot))(\xi)$ est l'unique solution de:

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi(t_0, \cdot) = 0.$$

avantages : équation de type diffusif \implies nombreuses propriétés, approximation aisée

On obtient alors une réalisation d'état (locale en temps) de l'opérateur intégral \mathcal{H} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi(t_0, \cdot) = 0 \\ (\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle \end{array} \right.$$

où $\mu(t, \cdot)$ solution de $\mathcal{A}^* \mu(t, \cdot) = h(t, \cdot)$: **γ -symbole** de \mathcal{H}

Représentation diffusive

Principe (4)

Propriété fondamentale: Pour toute u à support dans $[t_0, \infty[$, la γ -représentation $\mathfrak{R}d_\gamma u = (\mathcal{A}u(t, \cdot))(\xi)$ est l'unique solution de:

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi(t_0, \cdot) = 0.$$

avantages : équation de type diffusif \implies nombreuses propriétés, approximation aisée

On obtient alors une réalisation d'état (locale en temps) de l'opérateur intégral \mathcal{H} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi(t_0, \cdot) = 0 \\ (\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle \end{array} \right.$$

où $\mu(t, \cdot)$ solution de $\mathcal{A}^* \mu(t, \cdot) = h(t, \cdot)$: γ -symbole de \mathcal{H}

Hypothèses essentielles requises:

- ▶ analyticité dans Ω_γ^+ de $H(t, \cdot) = \mathcal{L}h(t, \cdot)$,
- ▶ décroissance à l'infini de $H(t, \cdot)$.

Propriétés:

- ▶ équation d'état universelle pour tous les opérateurs admettant un γ -symbole,
- ▶ en particulier, tout opérateur rationnel strictement propre à pôles dans Ω_γ^- admet une telle réalisation

Représentation diffusive

Cadre topologique

$\forall u \in \mathcal{D}'_+, \psi(t, \cdot) \in \Delta_\gamma$ espace topologique sous-espace fermé de \mathcal{D}_{L^∞}

Espace des γ -symboles: Δ'_γ $\xleftrightarrow{\text{dualité}}$ Espace des γ -représentations: Δ_γ
--

Δ'_γ est un espace quotient de distributions \implies non unicité du γ -symbole, γ -symbole=classe d'équivalence de distributions

γ -symbole canonique: $\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H|_{\gamma^+}$ (trace à droite au sens des distributions)

propriétés:

- ▶ $\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma$ espaces complets; existence de sous espaces de Hilbert de Δ'_γ
- ▶ somme, produit par un scalaire sont des opérations continues
- ▶ approximations simples, économiques et précises
- ▶ si $\#$ est le produit image dans Δ'_γ du produit de composition des opérateurs, alors $(\Delta'_\gamma, \#)$ est une algèbre sans diviseur de 0
- ▶ continuité dans Δ'_γ du produit interne $\#$
- ▶ nombreuses extensions possibles

Représentation diffusive

Exemple de γ -symboles (1)

<u>conditions</u>	<u>γ-symbole</u>	<u>rép. impuls.</u>	<u>\mathcal{L}-symbole</u>
$\gamma(0) = 0$	δ	1	p^{-1}
$\left. \begin{array}{l} 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1 \\ 0 \in \gamma \end{array} \right\}$	$\frac{\gamma'}{2i\pi} \gamma^{-\alpha}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}$	$p^{-\alpha}$
	δ_a	$e^{\gamma(a)s}$	$\frac{1}{p - \gamma(a)}$
	$\delta_a \#_{\gamma} \delta_b = \frac{1}{\gamma(a) - \gamma(b)} (\delta_a - \delta_b)$		$\frac{1}{(p - \gamma(a))(p - \gamma(b))}$
	$\delta_a \#_{\gamma} \delta_a = \frac{1}{\gamma'(a)} \delta'_a$		$\frac{1}{(p - \gamma(a))^2}$

Représentation diffusive

Exemple de γ -symboles (2)

<u>conditions</u>	<u>symbole diffusif μ</u>	<u>rép. impuls. h</u>	<u>\mathcal{L}-symbole H</u>
	δ	1	p^{-1}
$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ \alpha \notin \mathbb{N} \end{array} \right\}$	$\mu_\alpha = \operatorname{pf} \frac{\mathbf{1}_{\xi > 0} \sin(\pi\alpha)}{\pi \xi^\alpha}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}$	$p^{-\alpha}$
$a, b \geq 0$	$\frac{1}{b-a} \delta_a + \frac{1}{a-b} \delta_b$	$e^{-as} * e^{-bs}$	$[(p+a)(p+b)]^{-1}$
$a > 0$	$\frac{\mathbf{1}_{0 < \xi < a}}{\pi \sqrt{\xi(a-\xi)}}$	$e^{-\frac{at}{2}} I_0\left(\frac{at}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{p}\sqrt{p+a}}$
$(\gamma : \text{cte d'Euler})$	$-\operatorname{pf} \frac{\mathbf{1}_{\xi > 0}}{\xi}$	$\ln s$	$-p^{-1}(\gamma + \ln p)$
	$\sum_{\mathbb{Z}} \delta_{n^2 \pi^2}$	$\sum_{\mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi^2 s}$	$(\sqrt{p} \tanh \sqrt{p})^{-1}$

Représentation diffusive

Approximations numériques

Exemple : approximation de $\psi(t, \cdot)$ par interpolation sur un maillage $\{\xi_k\}$:
approximation ψ_n de ψ :

$$\psi_n(t, \xi) = \sum_{k=1}^n \psi(t, \xi_k) \Lambda_k(\xi),$$

où Λ_k , $k = 1..n$ sont des fonctions d'interpolation.

\implies approximation convergente y_n de $y = \mathcal{H}u$ (au sens de topologies variées):

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \psi(t, \xi_k) \text{ avec } \lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \Lambda_k(\xi) d\xi,$$

et réalisation d'état de dimension finie:

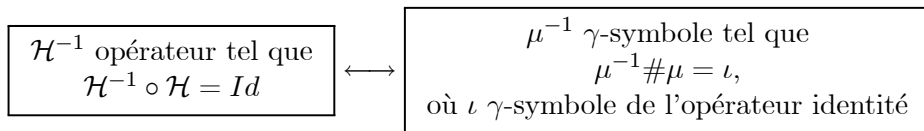
$$\partial_t \psi_k(t) = \gamma_k \psi_k(t) + u(t), \quad \psi_k(t_0) = 0,$$

avec $\psi_k(t) = \psi(t, \xi_k)$ et $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$.

Remarque: grâce à la nature diffusive de l'équation, quelques dizaines de ξ suffisent pour obtenir une bonne approximation

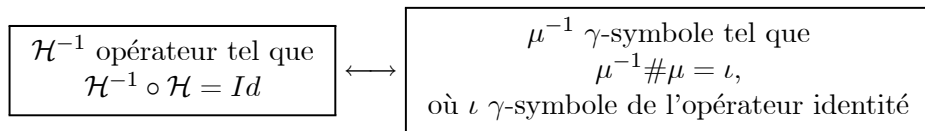
Inversion γ -symbolique

Objectif: définir l'image dans l'espace des γ -symboles de l'inversion d'opérateurs:



Inversion γ -symbolique

Objectif: définir l'image dans l'espace des γ -symboles de l'inversion d'opérateurs:



Problèmes:

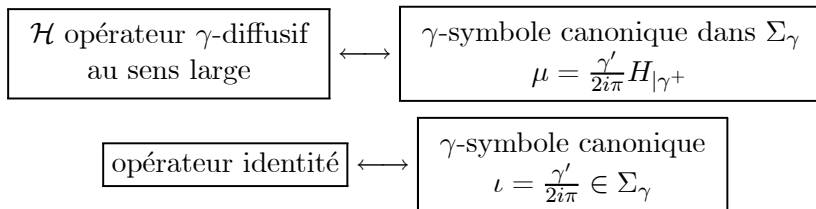
- ▶ algèbre Δ'_γ sans diviseur de 0 mais non unitaire
- ▶ l'inverse d'un opérateur admettant un γ -symbole dans Δ'_γ n'admet jamais de γ -symbole dans Δ'_γ

\implies **nécessité de passer à la sur-algèbre Σ_γ des γ -symboles d'opérateurs γ -diffusifs au sens large**, c'est à dire d'opérateurs \mathcal{H} tels que $\mathcal{H} \circ \partial_t^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$ γ -diffusif au sens strict:

Si en outre $\gamma(0) = 0$, Σ_γ est unitaire

Inversion γ -symbolique

Dans Σ_γ , on a:



\implies l'inversion γ -symbolique est donc a priori bien définie dans Σ_γ

Si \mathcal{H}^{-1} γ -diffusif au sens large, il admet comme γ -symbole canonique dans Σ_γ :

$$\mu^{-1} = \frac{\gamma'}{2i\pi} \left(\frac{1}{H} \right)_{|\gamma^+},$$

et comme réalisation diffusive, avec m tel que $\partial_t^{-m} \circ \mathcal{H}^{-1}$ γ -diffusif au sens strict:

$$\mathcal{H}^{-1}u = \left\langle \delta^{\#m} \# \mu^{-1}, \mathfrak{Rd}_\gamma \partial_t^m u \right\rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$$

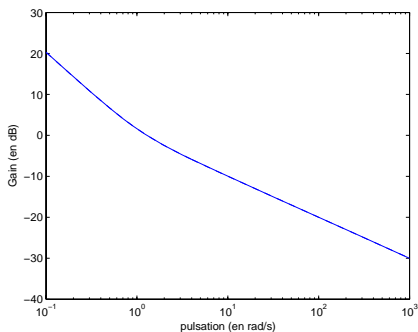
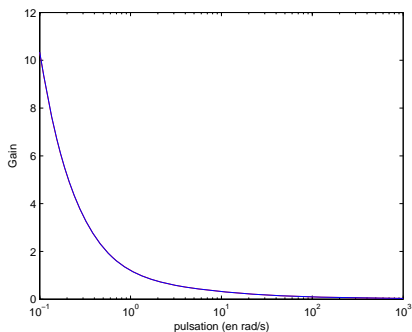
Inversion γ -symbolique

Remarque importante: l'ensemble des γ -symboles de Σ_γ inversibles dans Σ_γ n'est voisinage d'aucun de ces points

C'est une propriété inhérente à la notion de symbole: il existe un idéal de γ -symboles non inversibles dense dans Δ'_γ

Conséquence: numériquement, le problème d'inversion γ -symbolique nécessitera certaines précautions

Exemple: inversion numérique de $\mathcal{H} = (\sqrt{\partial_t + 1})^{-1}$: tracé de $\partial_t^{-1} \circ (\sqrt{\partial_t + 1})$



Opérateurs matriciels

Définition

Extension naturelle, questions topologiques similaires au cas scalaire: algèbres $\Delta_\gamma^{n \times m}$, $\Sigma_\gamma^{n \times m}$ des γ -symboles (resp. stricts et larges) d'opérateurs matriciels de taille $n \times m$

Notations (utilisation de la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés)

\mathcal{H} opérateur matriciel de taille $n \times m$ de γ -symbole matriciel $\mu \in \Sigma_\gamma^{n \times m}$:

$$(\mathcal{H}u)_i = \mathcal{H}_i^j u_j \quad \text{et} \quad \langle \mu, \psi \rangle_i = \left\langle \mu_i^j, \psi_j \right\rangle_{\Delta_\gamma^i, \Delta_\gamma},$$

où $\psi = \Re d_\gamma u$ (représentation diffusive vectorielle de u) est solution de $\partial_t \psi_j(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi_j(t, \xi) + u_j(t) \quad j = 1 : m$.

Produit d'opérateurs et de γ -symboles matriciels

► pour tous \mathcal{H} et \mathcal{K} opérateurs matriciels de taille respective $n \times l$ et $l \times m$,

$$\forall i = 1 : n, \forall j = 1 : m, \quad (\mathcal{H} \circ \mathcal{K})_i^j = \mathcal{H}_i^l \circ \mathcal{K}_l^j,$$

► $\forall \mu \in \Sigma_\gamma^{n \times l}, \forall \nu \in \Sigma_\gamma^{l \times m}, \forall i = 1 : n, \forall j = 1 : m, \quad (\mu \# \nu)_i^j = \mu_i^l \# \nu_l^j$.

Opérateurs matriciels

Inversion

Inversion γ -symbolique d'un opérateur matriciel carré

$$\mu^{-1} = (\det(\mu))^{-1} \# (\mu^c)^T,$$

avec

- $\det(\mu)$ γ -symbole scalaire défini par la récurrence suivante:
 - si $n = 1$: $\det(\mu) = \mu$,
 - si $n > 1$: $\det(\mu) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \mu_j^i \# \det(\tilde{\mu}_{ij})$,

où $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$ choisi arbitrairement et $\tilde{\mu}_{ij}$ γ -symbole matriciel obtenu à partir de μ en lui enlevant sa $i^{\text{ème}}$ colonne et sa $j^{\text{ème}}$ ligne,

- et μ^c γ -symbole matriciel appartenant à $\Sigma_\gamma^{n \times n}$ défini par:

$$\forall i, j = 1..n, \quad (\mu^c)_i^j = (-1)^{i+j} \det(\tilde{\mu}_{ij}).$$

Opérateurs matriciels

Inversion

Exemple:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \partial_t & \partial_t^2 & 0 \\ \partial_t^{-1} & \partial_t^0 & \partial_t^0 \\ 0 & \partial_t & \partial_t \end{bmatrix} \text{ de } \gamma\text{-symbole matriciel } \mu = \begin{bmatrix} \delta^{-1} & \delta^{-2} & 0 \\ \delta & \delta^0 & \delta^0 \\ 0 & \delta^{-1} & \delta^{-1} \end{bmatrix},$$

où ∂_t^0 désigne l'opérateur identité, de γ -symbole $\delta^0 = \iota$. On a:

$$\det(\mathcal{H}) = -\partial_t^2 \text{ et } \det(\mu) = -\delta^{-2},$$

d'où

$$\mathcal{H}^{-1} = -\partial_t^{-2} \circ \begin{bmatrix} 0 & -\partial_t^3 & \partial_t^2 \\ -\partial_t^0 & \partial_t^2 & -\partial_t \\ \partial_t^0 & -\partial_t^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mu^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \delta^{-1} & -\delta^0 \\ \delta^2 & -\delta^0 & \delta \\ -\delta^2 & \delta^0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec $\delta^2 = \frac{1}{\gamma'(0)}\delta'$, etc.

Applications

1. Formulation diffusive et schémas numériques pour une classe d'équations intégrodifférentielles
2. Application en identification de modèles dynamiques complexes

Applications

Construction de schémas numériques stables (1)

Classe d'équations intégro différentielles de la forme:

$$\begin{bmatrix} H_1(\partial_t) & \\ & H_2(\partial_t) \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} & -\partial_x \\ -\partial_x & \end{bmatrix} \Phi,$$

avec $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$.

hypothèse: $H_1(\partial_t)$ et $H_2(\partial_t)$ opérateurs diffusifs de γ -symboles ν_1^2 et ν_2^2 positifs et réels.

Applications

Construction de schémas numériques stables (1)

Classe d'équations intégro différentielles de la forme:

$$\begin{bmatrix} H_1(\partial_t) & \\ & H_2(\partial_t) \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} & -\partial_x \\ -\partial_x & \end{bmatrix} \Phi, \quad (3)$$

avec $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$.

hypothèse: $H_1(\partial_t)$ et $H_2(\partial_t)$ opérateurs diffusifs de γ -symboles ν_1^2 et ν_2^2 positifs et réels.

\implies Formulation diffusive équilibrée ($\gamma(\xi) = -|\xi|$):

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, x, \xi) = \begin{bmatrix} -\xi & 0 \\ 0 & -\xi \end{bmatrix} \psi(t, x, \xi) + \begin{bmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{bmatrix} \langle \nu, \psi(t, x, \cdot) \rangle, & \forall \xi \in \mathbb{R}^+ \\ \Phi(t, x) = \langle \nu, \psi(t, x, \cdot) \rangle, \end{cases}$$

avec $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ et $\langle \nu, \psi \rangle = (\langle \nu_1, \psi_1 \rangle, \langle \nu_2, \psi_2 \rangle)^T$

Applications

Construction de schémas numériques stables (2)

Etude d'énergie:

$$\text{soit } E_\psi = \frac{1}{2} \left(\iint \nu_1^2 |\psi_1|^2 d\xi dx + \iint \nu_2^2 |\psi_2|^2 d\xi dx \right)$$

\implies grâce à la positivité de ν_i^2 , $i = 1, 2$, la fonctionnelle E_ψ définit une norme hilbertienne notée $\|\cdot\|^2$.

Proposition 2 *La fonctionnelle énergie $E_\psi = \|\psi\|^2$ vérifie pour tout solution ψ de (3):*

$$\frac{dE_\psi}{dt} = \iint \nu_1^2 \operatorname{Re}(\gamma_1) |\psi_1|^2 d\xi dx + \iint \nu_2^2 \operatorname{Re}(\gamma_2) |\psi_2|^2 d\xi dx \leq 0.$$

\implies permet d'établir la nature bien posée du problème(3)

\implies permet la construction de schémas numériques stables

Applications

Construction de schémas numériques stables (4)

Etude d'énergie discrète:

$$E^n = \sum_l \|\psi_1^n(\xi_l)\|_k^2 + \|\psi_2^n(\xi_l)\|_k^2 + (\psi_1^{n+1}(\xi_l)|\psi_1^{n-1}(\xi_l))_k + (\psi_2^{n+1}(\xi_l)|\psi_2^{n-1}(\xi_l))_k.$$

Si

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{\nu_i(\xi_l)} \sum_j (\sqrt{\nu_1(\xi_j)} + \sqrt{\nu_2(\xi_j)}) &> 0 \quad \forall i, l \\ \text{et } 1 - 2\Delta t \xi_l - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{\nu_i(\xi_l)} \sum_j (\sqrt{\nu_1(\xi_j)} + \sqrt{\nu_2(\xi_j)}) &> 0 \quad \forall i, l, \end{aligned} \tag{4}$$

et si Δt suffisamment petit, E^n est positive et telle que

$$E^{n+1} < E^n$$

Remarque: cette condition suffisante de stabilité peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > c_n,$$

avec $c_n > c$, c étant la vitesse de propagation des ondes à hautes fréquences pour l'équation considérée.

Applications

Construction de schémas numériques stables (5)

Exemple de simulations:

$$H_1(p) = \rho e (p + a (1 + bp)^{1/2})$$
$$\text{et } H_2(p) = \chi e p \left(1 - c \frac{p}{p + a' (1 + b'p)^{1/2}}\right).$$

γ -symboles de \mathcal{H}_1^{-1} et de \mathcal{H}_2^{-1} :

$$\mu_1(\xi) = \frac{a}{\pi \rho} \frac{\sqrt{b\xi-1}}{\xi^2 + \frac{a\xi}{2} - a^2} \mathbf{1}_{\xi > 2a} + k_1 \delta_{\xi_1}(\xi),$$
$$\mu_2(\xi) = \frac{a'c}{\pi \chi} \frac{\sqrt{b'\xi-1}}{\xi^2 (1-c)^2 + \frac{a'\xi}{2} - a'^2} \mathbf{1}_{\xi > 2a'} + \frac{1}{\chi} \delta_0(\xi) + k_2 \delta_{\xi_2}(\xi),$$

avec ξ_1, ξ_2, k_1 et k_2 positifs.

- Condition de stabilité:**
1. Δt suffisamment petit,
 2. Condition (4)
 3. $1 - 2\Delta t \xi_l \in [0, 1]$

Applications

Construction de schémas numériques stables (6)

simulation 1: le domaine fréquentiel couvert par ξ va de 10^{-4} à 10^2 rad.s $^{-1}$

valeur de a $\Delta_t = a\Delta_x$	condition 2	condition 3	Stabilité
0.0031	<i>vérifié</i>	<i>vérifié</i>	<i>oui</i>
de 0.0032 à 0.0040	<i>non vérifié</i>	<i>vérifié</i>	<i>oui</i>
de 0.0041 à 0.0049	<i>non vérifié</i>	<i>vérifié</i>	<i>non</i>

simulation 2: le domaine fréquentiel couvert par ξ va de 10^{-4} à 10^6 rad.s $^{-1}$

valeur de a : $\Delta_t = a\Delta_x$	condition 2	condition 3	Stabilité
0.0001495	<i>vérifié</i>	<i>vérifié</i>	<i>oui</i>
de 0.0001496 à 0.0001499	<i>non vérifié</i>	<i>vérifié</i>	<i>oui</i>
de 0.00015 à 0.0003	<i>non vérifié</i>	<i>non vérifié</i>	<i>oui</i>
0.00031	<i>non vérifié</i>	<i>non vérifié</i>	<i>non</i>

Ref: C. Casenave, E. Montseny, L. Ségui, *Formulation différentielle dissipative d'un modèle de paroi absorbante en aéroacoustique*, Soumis.

Applications

Identification de modèles dynamiques (1)

De nombreux modèles de la physique s'écrivent sous la forme:

$$H(\partial_t)X = f(X, u)$$

avec lorsque u est petite (petits mouvements): $H(\partial_t)X \simeq Bu$ (i.e. $f(X, u) = o(X)$)

(cas particulier $\partial_t X = g(X, u)$: si g dérivable autour du point d'équilibre 0, on pose $H(\partial_t) = \partial_t - g'(0, 0)$)

Problème d'identification: à partir de mesures $y = h(X)$, estimer $H(\partial_t)$ et f .

Principe:

avec u "petite", identifier dans un premier temps la composante **linéaire** $H(\partial_t)$, et **ensuite** la partie non linéaire statique f (qui n'intervient qu'au grands mouvements)

Le problème d'identification de $H(\partial_t)$ est traité via la représentation diffuse
→ identification d'un γ -symbole (= fonction de ξ)

Applications

Identification de modèles dynamiques (2)

Identification d'un opérateur $H = H(\partial_t)$ à partir de mesures

Pour u "petite" (connue), le modèle devient:

$$H(\partial_t)X = Bu$$

soit sous formulation diffusive, avec μ le γ -symbole de $H(\partial_t)^{-1}$ et ψ_{Bu} la γ -représentation de Bu :

$$X = \langle \mu, \psi_{Bu} \rangle .$$

A partir de la mesure $y = h'(0) X$, on obtient une formulation **linéaire** par rapport à μ :

$$y = C \langle \mu, \psi_{Bu} \rangle = \mathbf{A} \cdot \mu$$

qui permet (sous hypothèse) l'estimation par pseudo-inversion:

$$\mu^* = \mathbf{A}^\dagger y.$$

Applications

Identification de modèles dynamiques (3)

Identification de f

Une fois μ identifié, s'il existe un opérateur \mathcal{Q} connu tel que:

$$X = \mathcal{Q}(y),$$

alors en notant $w := H(\partial_t)\mathcal{Q}(y)$ et $z := (\mathcal{Q}(y), u)$, fonctions (de t) connues (grâce à l'estimation de μ):

$$w(t) = f(z(t)),$$

expression qui permet d'estimer f par simple régression **statique** (méthodes standard).

Applications

Identification de modèles dynamiques (4)

Exemple simple (inspiré d'un problème de génie électrique)

On considère le modèle:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 & \mathcal{H}_2 \\ 0 & \mathcal{H}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(X_2) \\ u + f(X_1) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

avec \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 , g connus et \mathcal{H}_3 et f à identifier à partir de $y = X_2$ mesuré et u connu.

Aux petits mouvements, le système est linéaire et on a:

$$y = X_2 = \mathcal{H}_3^{-1}u = \langle \mu_3, \psi_u \rangle = \mathbf{A}_{\psi_u} \cdot \mu_3$$

d'où on peut identifier le γ -symbole μ_3 de \mathcal{H}_3^{-1} :

$$\mu_3 = \mathbf{A}_{\psi_u}^\dagger \cdot y.$$

Applications

Identification de modèles dynamiques (5)

On a alors formellement (à partir de (5)):

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1^{-1}g(y) - \mathcal{H}_1^{-1} \circ \mathcal{H}_2 y \\ y \end{pmatrix} \quad (= \mathcal{Q}(y))$$

et on en déduit l'expression (pour tout t):

$$\mathcal{H}_3 y = u + f(\mathcal{H}_1^{-1}(g(y) - \mathcal{H}_2 y),$$

soit, sous formulation diffusive:

$$\langle \delta^{m'} \# \mu_3^{-1}, \text{Rd} \partial_t^{m'} y \rangle = u + f(\langle \mu_1, \text{Rd} g(y) \rangle - \langle \delta^m \# \mu_1 \# \nu_2, \text{Rd} \partial_t^m y \rangle)$$

qui permet une fois calculés les termes $w := \langle \delta^{m'} \# \mu_3^{-1}, \text{Rd} \partial_t^{m'} y \rangle - u$

et $z := \langle \mu_1, \text{Rd} g(y) \rangle - \langle \delta^m \# \mu_1 \# \nu_2, \text{Rd} \partial_t^m y \rangle$, l'estimation de f par régression, par exemple:

$$\|f^*(z) - w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^p)}^2 = \min_{f \in F}.$$

Applications

Identification de modèles dynamiques (6)

Remarque: Pour rendre le problème d'identification de f statique, cette formulation nécessite le calcul de l'**inverse** du γ -symbole identifié μ_3 .

Refs:

- L.Laudebat, P.Bidan, A.Rumeau, G.Montseny, *Modeling and optimal identification of pseudodifferential electrical dynamics by means of diffusive representation - Part II*, Soumis.
- C.Casenave, G.Montseny, *Optimal identification by means of diffusive representation and application to the impedance operator of absorbent materials*, Soumis.