

Contrôlabilité exacte de l'équation de Korteweg-de Vries

Emmanuelle Crépeau(UVSQ/Inria Rocquencourt)
En collaboration avec Eduardo Cerpa et Jean-Michel Coron
(Paris 11)

Mars 2007

Plan de la présentation :

Introduction

Cas non critique

Linéarisé autour de $(y, u) = (0, 0)$

Résultat

Application de HUM

Inégalité d'observabilité

Contrôle du non linéaire

Cas critique à deux directions

Développement en puissance

Passage au non linéaire

Cas critique à quatre directions

Cas critique à n directions, $n > 4$

Perspectives

Introduction

Équation de Korteweg-de Vries (KdV).

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0$$

- ▶ Découverte par Boussinesq en 1871.
- ▶ Terme de dispersion et de convection non linéaire.
- ▶ Apparaît en mécanique des fluides (canaux à faible hauteur d'eau, écoulement du sang dans les artères,...)

Problème de contrôle posé

$$\begin{aligned}y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x &= 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, L), \\y(t, 0) = y(t, L) &= 0, \\y_x(t, L) &= u(t)\end{aligned}$$

Peut-on trouver un contrôle u tel que la solution y aille de y_0 à y_T en un temps T donné ?

Remarque On supposera dans la suite $y^0 = 0$
Prendre $\tau = T - t, \xi = L - x$

Linéarisé autour de $(y, u) = (0, 0)$

Problème de contrôle linéarisé autour de $(0, 0)$:

$$\begin{aligned}
 y_t + y_x + y_{xxx} &= 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, L), \\
 y(t, 0) &= y(t, L) = 0, \\
 y_x(t, L) &= u(t), \\
 y(0, \cdot) &= y_0.
 \end{aligned}$$

Définition Soit $T > 0$, le système est **contrôlable** en temps T si

$$\forall y_0, y_T \in L^2(0, L), \exists u \in L^2(0, T), t.q. y(T, \cdot) = y_T.$$

Résultat

Théorème : (L. Rosier 97) Soit $\mathcal{N} = \{2\pi\sqrt{\frac{j^2+jl+l^2}{3}}, j, l \in \mathbb{N}^*\}$, soit $T > 0$, Le système linéarisé est exactement contrôlable en temps T ssi $L \notin \mathcal{N}$.

Éléments de preuve

1. Caractère bien posé du problème (effet régularisant de KdV)
2. $y_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T)$ (régularité cachée)
3. Inégalité d'observabilité pour appliquer HUM

Existence de solutions

Soit A l'opérateur $Ay := -y_x - y_{xxx}$ avec
 $\mathcal{D}(A) = \{y \in H^3(0, L), y(0) = y(L) = y_x(L) = 0\}$.

A est fermé, dissipatif et A^* est dissipatif.

A génère un semi-groupe fortement continu de contractions sur $L^2(0, L)$.

$(S(t))_{t \geq 0}$ = semi groupe de contractions associé.

Proposition :

- $y_0 \in L^2(0, L) \mapsto S(\cdot)y_0 \in C([0, T], L^2) \cap L^2(0, T, H^1)$ est continue
- $\|y_x(\cdot, 0)\|_{L^2(0, T)} \leq \|y_0\|_{L^2(0, L)}$
- $\|y\|_{L^2(0, T, H^1(0, L))} \leq \sqrt{\frac{4T+L}{3}} \|y_0\|_{L^2(0, L)}$

Contrôle/ Observabilité

On utilise HUM (méthode d'unicité hilbertienne) introduite par J.L. Lions en 88,

Contrôle \Leftrightarrow Observabilité du problème adjoint

Application de HUM

$$\text{IPP sur } \int_0^T \int_0^L z(y_t + y_x + y_{xxx}) dx dt = 0$$

$$\implies \int_0^L z_T(x) y(T, x) dx = \int_0^T z_x(t, L) u(t) dt$$

Soit $\Lambda : z_T \in L^2(0, L) \mapsto y(T, \cdot) \in L^2(0, L)$,

Λ est linéaire continue et

$$(\Lambda(z_T), z_T)_{L^2(0, L)} = \|z_x(\cdot, L)\|_{L^2(0, T)}^2 \geq C \|z_T\|_{L^2(0, L)}^2$$

Lax-Milgram $\implies \Lambda$ est inversible CQFD.

On note $\Gamma : y_T \in L^2(0, L) \mapsto z_x(\cdot, L) \in L^2(0, T)$.

Inégalité d'observabilité sur le problème adjoint

$$\begin{aligned} z_t + z_x + z_{xxx} &= 0, \\ z(\cdot, 0) = z(\cdot, L) &= 0, \\ z_x(\cdot, 0) &= 0, \\ z(T, x) &= z_T(x). \end{aligned}$$

Proposition : (L. Rosier 97) Soit $L, T > 0$, $\forall z_T \in L^2(0, L)$ le problème adjoint admet une solution "faible", $z_x(\cdot, L) \in L^2(0, T)$.
Si $L \notin \mathcal{N}$, $\exists C_1, C_2(L, T) > 0$ tels que

$$C_1 \|z_T\|_{L^2(0, L)} \leq \|z_x(\cdot, L)\|_{L^2(0, T)} \leq C_2 \|z_T\|_{L^2(0, L)}$$

Obstruction dans le cas $L \in \mathcal{N}$

Théorème : (L. Rosier 97) Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\phi \in H^3((0, L), \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ avec

$$\begin{aligned} -\phi_x - \phi_{xxx} &= \lambda\phi, \\ \phi(0) = \phi(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) &= 0 \end{aligned}$$

si et seulement si $L \in \mathcal{N}$.

Donc

$$\int_0^L y(T, x)\phi(x)dx = e^{-\lambda T} \int_0^L y(0, x)\phi(x)dx.$$

Remarque : Si $L = 2\pi$, $\phi(x) = 1 - \cos x$ et $\lambda = 0$.

Contrôle du non linéaire

Théorème : (L. Rosier 97) Soit $T > 0$, et $L \notin \mathcal{N}$. Alors il existe $C > 0$ et $r_0 > 0$ tel que $\forall y_0, y_T \in L^2(0, L)$ avec

$$\|y_0\|_{L^2}, \|y_T\|_{L^2} < r_0$$

il existe $y \in C^0([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2((0, T), H^1(0, L))$ et $u \in L^2(0, T)$ vérifiant KdV et tels que

$$y(0, \cdot) = y_0,$$

$$y(T, \cdot) = y_T,$$

$$\|u\|_{L^2} \leq C(\|y_0\|_{L^2} + \|y_T\|_{L^2}).$$

Preuve

Pour résoudre le non linéaire, on écrit

$$y = S(t)y^0 + y_1 + y_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1t} + y_{1x} + y_{1xxx} = 0, \\ y_1(t, 0) = y_1(t, L) = 0, \\ y_{1x}(t, L) = u(t), \\ y_1(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{2t} + y_{2x} + y_{2xxx} = f, \\ y_2(t, 0) = y_2(t, L) = 0, \\ y_{2x}(t, L) = 0, \\ y_2(0, x) = 0. \end{array} \right.$$

avec $f = -yy_x$

On note $\psi_1 : u \in L^2(0, T) \mapsto y_1$, $\psi_2 : f \in L^1(0, T, L^2) \mapsto y_2$

Point fixe

Soit $T > 0$, $y_0, y_T \in L^2(0, L)$, $\|y_0\|, \|y_T\| \leq r$

$$F : y \in L^2(0, T, H^1(0, L)) \mapsto \\ S(\cdot)y_0 + \psi_1 \circ \gamma(y_T - S(T)y_0 + \psi_2(y y_x)(T, \cdot)) + \psi_2(-y y_x)$$

On applique le thm de point fixe de Banach à la restriction de F sur $\bar{B}(0, R)$ pour R petit.

Contrôlabilité du non linéaire autour de 0 pour $L = 2k\pi$.

- ▶ 1ère idée : Utiliser le théorème sur la contrôlabilité autour des solutions stationnaires et utiliser la méthode du retour de J.M. Coron

Contrôle pour T grand...

- ▶ 2ème idée : (J.M. Coron, E.C. (04)) Utiliser le résultat de Rosier pour le linéarisé et essayer d'aller dans les directions manquées en un temps $T > 0$.

Cas critique

Théorème : (J.M. Coron, E.C. 04) Soit $T > 0$, et $L = 2k\pi$. Alors il existe $C > 0$ et $r_1 > 0$ tel que $\forall y_0, y_T \in L^2(0, L)$ avec

$$\|y_0\|_{L^2}, \|y_T\|_{L^2} < r_1$$

il existe $y \in C^0([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2((0, T), H^1(0, L))$ et $u \in L^2(0, T)$ vérifiant KdV et tels que

$$y(0, \cdot) = y_0,$$

$$y(T, \cdot) = y_T,$$

$$\|u\|_{L^2} \leq C(\|y_0\|_{L^2} + \|y_T\|_{L^2})^{1/3}.$$

Développement en puissance

Terme à l'ordre 1

$$\begin{aligned}y_t + y_x + y_{xxx} &= 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, L), \\y(t, 0) &= y(t, 2k\pi) = 0, \\y_x(t, 2k\pi) &= u(t), \\y(0, \cdot) &= y^0.\end{aligned}$$

Pour toute solution on a

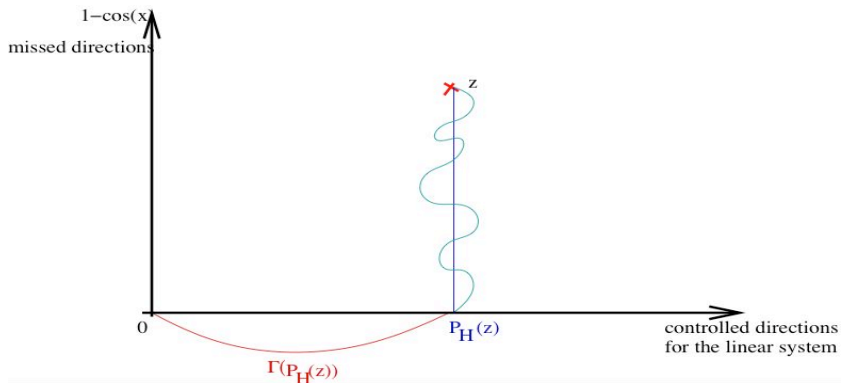
$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} y(1 - \cos(x)) dx = 0$$

Théorème pour l'ordre 1

Théorème : (L. Rosier(97)) Soit $T > 0$, $H = \{1 - \cos(x)\}^\perp$,
 $\forall (y_0, y_T) \in H \times H$, $\exists (y, u)$ tels que

$$y(0, \cdot) = y_0, y(T, \cdot) = y_T.$$

Idée



Ordre 2 et 3

Proposition : (J.M. Coron, E.C. (04)) Soit $T > 0$, il existe $(u, v, w) \in L^2(0, T)^3$ tels que si α, β, γ sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_t + \alpha_x + \alpha_{xxx} = 0, \\ \alpha(t, 0) = \alpha(t, 2\pi) = 0, \\ \alpha_x(t, 2\pi) = u(t), \\ \alpha(0, x) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_t + \beta_x + \beta_{xxx} = -\alpha\alpha_x, \\ \beta(t, 0) = \beta(t, 2\pi) = 0, \\ \beta_x(t, 2\pi) = v(t), \\ \beta(0, x) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_t + \gamma_x + \gamma_{xxx} = -(\alpha\beta)_x, \\ \gamma(t, 0) = \gamma(t, 2\pi) = 0, \\ \gamma_x(t, 2\pi) = w(t), \\ \gamma(0, x) = 0 \end{array} \right.$$

Alors, $\alpha(T, x) = 0$, $\beta(T, x) = 0$, $\gamma(T, x) = 1 - \cos(x)$

Pour aller dans la direction opposée, on prend

$(u_-, v_-, w_-) = (-u, v, -w)$.

Idée de la preuve

Avec le thm de Rosier, il suffit de montrer que

$$\alpha(T, \cdot) = \beta(T, \cdot) = 0,$$

$$\int_0^L \gamma(T, \cdot)(1 - \cos(x)) dx = \|1 - \cos(x)\|_{L^2(0,L)}^2$$

Mais

$$\int_0^L \gamma(T, \cdot)(1 - \cos(x)) dx = \int_0^T \int_0^L \alpha\beta \sin(x) dx dt$$

\implies montrer qu'il existe α, β ,

$$\begin{cases} \int_0^T \int_0^L \alpha\beta \sin(x) dx dt \neq 0, \\ \alpha(T, \cdot) = \beta(T, \cdot) = 0 \end{cases}$$

Passage au non linéaire

Rappel du problème posé : Montrer qu'il existe $r_1 > 0$,
 $\forall y_T \in L^2(0, L), \|y_T\|_{L^2(0, L)} \leq r_1, \exists u \in L^2(0, T),$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, \\ y(., 0) = y(., L) = 0, \\ y_x(., L) = u, \\ y(0, .) = 0 \end{array} \right. \implies y(T, .) = y_T$$

Idée : appliquer un théorème de point fixe à

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{y_T} : L^2(0, L) &\rightarrow L^2(0, L) \\ z &\mapsto z + y_T - F(G(z)) \end{aligned}$$

avec $z = p(z) + \lambda(z)(1 - \cos(x))$

$G(z) =$

(contrôle du linéarisé pour $p(z)$) $+ \lambda^{1/3}(z)u + \lambda^{2/3}(z)v + \lambda(z)w$.

$$\begin{aligned} F : L^2(0, T) &\rightarrow L^2(0, L) \\ h &\mapsto y(T, \cdot) \end{aligned}$$

Si z point fixe de \mathcal{T}_{y_T} alors $y_T = F(G(z))$ et le contrôle $G(z)$ convient.

Démonstration : $B_\epsilon = \{z \in L^2(0, L), \|z\|_{L^2(0,L)} \leq \epsilon\}$.

Lemme : $\exists C_1(T, L), \epsilon_1(T, L), \forall z \in B_{\epsilon_1},$

$$\|\mathcal{T}_0 z\|_{L^2} \leq \|z\|_{L^2}^{4/3}.$$

Preuve avec des estimées fines sur les solutions des problèmes non linéaires et un point fixe de Banach.

1. On applique le théorème du point fixe de Banach à

$$\Pi : H \rightarrow H$$

$$h \mapsto h + p(y_T) - p(F(G(h + \lambda e)))$$

pour y_T et λ suffisamment petits avec $e = 1 - \cos(x)$.

Démonstration de l'existence d'un point fixe

On se sert du lemme avec $h \in B_R \cap H$, $\|y_T\|_{L^2} + |\lambda| \leq R/3$, R petit.

$$\begin{aligned} \|\Pi(h)\| &\leq \|y_T\|_{L^2(0,2k\pi)} + \|h + \lambda e - F(G(h + \lambda e))\|_{L^2(0,2k\pi)} \\ &\leq \frac{R}{3} + \frac{2R}{3} = R. \end{aligned}$$

Donc pour R petit, $\Pi(B_R \cap H) \subset B_R \cap H$.

Pour la contraction, on se sert d'un autre théorème du point fixe de Banach appliqué aux solutions du problème non linéaire.

On obtient un unique point fixe $h(y_T, \lambda)$ dans $B_R \cap H$.

On applique le T.V.I. avec le lemme à

$$\mathcal{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \mapsto r \left[\lambda e + h(y_T, \lambda) + y_T - F \left(G(h(y_T, \lambda) + \lambda e) \right) \right]$$

$\exists \epsilon$ si $\|y_T\|_L^2 \leq \epsilon \sqrt{3L/8}$, $\mathcal{T}([- \epsilon, \epsilon]) \subset [- \epsilon, \epsilon]$

On obtient au moins un point fixe, λ_0 .

D'où,

$$F(G(h(y_T, \lambda_0) + \lambda_0(1 - \cos(x)))) = y_T$$

Conclusion :

Le contrôle $G(\lambda_{y_T}(1 - \cos(x)) + h(y_T, \lambda_{y_T}))$ permet d'aller de 0 à y_T .

Thm : [J.M. Coron, E. C. 2004] $\forall T > 0$, contrôlabilité locale autour de 0 du non linéaire si il n'y a que deux directions manquées

Une seule paire k, l telle que $L = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+kl+l^2}{3}}$.

4 directions manquées, $\pm\phi_1, \pm\phi_2$, parties réelles et imaginaires de la fonction propre, $ip\phi + \phi' + \phi''' = 0$.

Soit $M = \text{vect}\{\phi_1, \phi_2\}$ et $H = M^\perp$. Alors, pour y vérifiant kdv linéarisé,

$$\int_0^L y(t)\phi_1 = \cos(pt) \int_0^L y_0\phi_1 + \sin(pt) \int_0^L y_0\phi_2,$$

$$\int_0^L y(t)\phi_2 = \cos(pt) \int_0^L y_0\phi_2 + \sin(pt) \int_0^L y_0\phi_1$$

\implies si on arrive à atteindre un point de M on peut atteindre tout M en laissant évoluer la solution assez longtemps (au maximum π/p).

On peut montrer qu'on arrive dans l'espace manqué à l'ordre 2.
Puis point fixe du même type :

1. Banach sur le projeté sur H ,
2. Brouwer sur le projeté sur M

\implies contrôle mais pour $T > 2\pi/p$.

Thm :[E. Cerpa 2006] $\forall T > 2\pi/p$, contrôlabilité locale autour de 0 du non linéaire si il n'y a que quatre directions manquées

On subdivise le problème en deux cas :

- ▶ Cas dimension 2 : on applique le résultat de Cerpa
- ▶ Cas dimension 1 : on applique le résultat de Coron-Crépeau

On peut atteindre les n directions manquées après un certain temps T_c .

Perspectives

Questions :

- ▶ Y a-t-il un temps de contrôle minimal pour les cas à 4 directions ?
- ▶ Peut-on avoir de la contrôlabilité globale ?