Sur la vitesse de décroissance et la robustesse du contrôle en boucle fermé d'une corde

Marius TUCSNAK
Institut Elie Cartan de Nancy et
INRIA Lorraine, projet CORIDA

Plan de l'exposé

- Bases de Riesz et stabilité exponentielle
- Stabilisation frontière d'une corde élastique
- Etude de la robustesse
- Conclusions et perspectives

Institut ELIE CARTAN

Bases de Riesz et stabilité exponentielle

Quelques rappels sur la stabilité exponentielle(I)

On considère le système dynamique linéaire

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad z(0) = z_0 \in X,$$

avec $A : \mathcal{D}(A) \to X$, générateur d'un semi-groupe $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_t)_{t \geq 0}$ de classe C^0 dans X.

Question: Quel lien entre la stabilité exponentielle de $\mathbb{T}$ et le spectre $\sigma(A)$?

La condition $\mathrm{Re}\lambda < -\omega < 0$ pour tout $\lambda \in \sigma(A)$ n'est pas suffisante en dimension infinie.

Institut ELIE CARTAN

Quelques rappels sur la stabilité exponentielle(II)

Le taux de croisance de $\mathbb{T}$ est défini par $\omega_0(\mathbb{T}) = \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{1}{t} \log \|\mathbb{T}_t\|$, donc $\mathbb{T}$ exponentiellement stable ssi $\omega_0(\mathbb{T}) < 0$.

Il est claire que

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda \leq \omega_0(\mathbb{T}).$$

L'égalité est fausse, en général.

Bases de Riesz

Définition Une suite (ϕ_k) de lespace de Hilbert X est dite une *base de Riesz* dans X s'il existe un opérateur inversible $Q \in \mathcal{L}(X, l^2)$ tel que $Q\phi_k = e_k$ for all $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la suite $(\tilde{\phi}_k)$ définie par

$$\tilde{\phi}_k = Q^* Q \phi_k$$

est dite *suite biorthogonale* de (ϕ_k).

Proposition. Si (ϕ_k) est une base de Riesz dans X $(a_k) \in l^2$, alors il existe $m, M > 0$ t.q.

$$\frac{1}{M}\|(a_k)\|_{l^2} \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \phi_k \right\| \leq \frac{1}{m}\|(a_k)\|_{l^2},$$

Semi-groupes diagonalisables

Définition. Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$, avec $\mathcal{D}(A) \subset X$. A est dit *diagonalisable* si $\rho(A) \neq \emptyset$ et s'il existe une base de Riesz (ϕ_k) dans X formée par des vecteurs propres de A. Le semi-groupe $\mathbb{T}$ est dit diagoanlisable si son généraure A est diagonalisable.

Proposition. Si $\mathbb{T}$ est diagonalisable alors

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}\lambda_k = \omega_0(\mathbb{T}).$$

Institut ELIE CARTAN

Stabilisation frontière d’une corde élastique

Formulation du problème

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) &= 0, && x \in (0,1),\ t > 0 \\
z(x,0) = z_0(x),\quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) &= z_1(x), && x \in (0,1), \\
z(0,t) &= 0, && t > 0, \\
\frac{\partial z}{\partial x}(1,t) = -a\frac{\partial z}{\partial t}(1,t) &- bz(1,t) && t > 0.
\end{aligned}
$$

$$
E(t) = \int_0^1 (z_x^2 + z_t^2)\,\mathrm{d}x + bz^2(1,t) \leq E(0) \quad \forall t \in \mathbb{R},
$$

si $a,\ b > 0$.

Le feedback en vitesse (b=0)

Théorème 1. *(Rideau,1985) On suppose que* $b = 0$ *et* $a \neq 1$*. Alors*

$$\omega_0(\mathbb{T}) = \frac{1}{2} \ln \frac{|a-1|}{a+1},$$

donc le système est exponenetiellement stable.

Idée de la preuve. *(avec* $a \in (0,1)$*).* Les valeurs propres de A sont

$$\mu_n = \frac{1}{2} \ln \frac{|a-1|}{a+1} \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

et les fonctions propres $\varphi_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{\sinh \mu_n x}{\mu_n} \\ \sinh \mu_n x \end{pmatrix}$, forment un ebase de Riesz dans X.

Le feedback en vitesse et en position (a,b>0)

Théorème 2.(Conrad et al., 2002) On suppose que $a,\ b > 0$ *et* $a \neq 1$. *Alors*

$$0 > \omega_0(\mathbb{T}) > \frac{1}{2} \ln \frac{|a-1|}{a+1},$$

donc le système est exponenetiellement stable. Donc l'introduction du feed-back en position n'améliore pas la stabilité du sytème.

Idée de la preuve. Estimer le valeurs propres de A en utilisant de l'analyse complexe. Prouver que les vecteurs propres forment une base de Riesz en utilisant le Théorème de Bari.

Institut ELIE CARTAN

Etude de la robustesse

Un système perturbé

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) &= w(t), \qquad && x \in (0,1),\ t>0 \\
z(x,0) = z_0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) &= z_1(x), && x \in (0,1), \\
z(0,t) &= 0, && t>0, \\
\frac{\partial z}{\partial x}(1,t) = -a\frac{\partial z}{\partial t}(1,t) &- bz(1,t) && t>0.
\end{aligned}
$$

$$
y(t) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,t).
$$

Institut ELIE CARTAN

Définition. Pour $\gamma > 0$ on dit que le système ci-dessus et γ-robuste si ses solutions avec $z_0 = z_1 = 0$ satisfont

$$\|y\|_{L^2(0,\infty)} \leq \gamma \|w\|_{L^2(0,\infty)}, \qquad \forall\, w \in L^2(0,\infty) \qquad (2).$$

L'inf des γ satisfaisant (2), noté $\gamma_0(a,b)$, est dit *coefficient de robustesse* de (a,b).

Théorème 3. Si $a \in \left(1, \frac{3}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{\pi}{2}\right)$, alors

$$1 = \gamma_0(a,0) > \inf_{b \geq 0} \gamma_0(a,b) > \frac{27}{4\pi^2}.$$

Idée de la preuve

$$\widehat{y}(s) = G(s)\widehat{w}(s) \qquad (s \in \mathbb{C}_0),$$

avec la fonction de transfert G donnée par

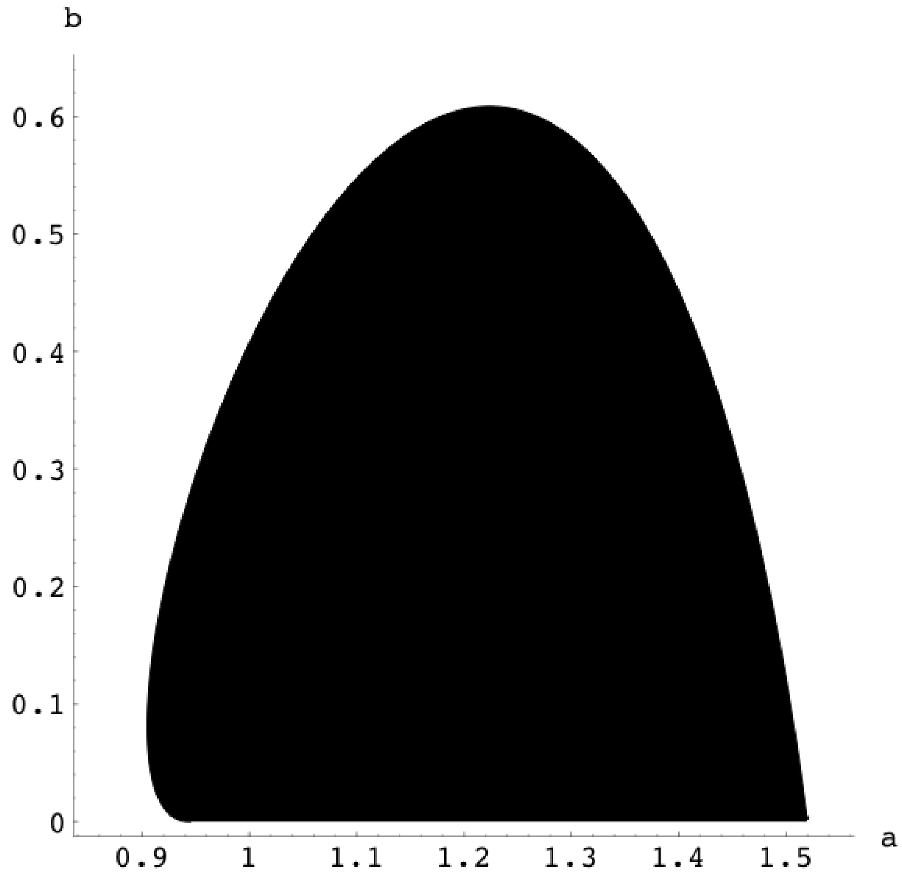
$$G(s) = \frac{\frac{as-b}{s}(1 - \cosh(s)) + \sinh(s)}{s\cosh(s) - (as - b)\ \sinh(s)} \qquad (s \in \mathbb{C}_0).$$

Par Paley-Wiener $\gamma_0(a,b) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |G(i\omega)|$ et

$$|G(i\omega)|^2 = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{a^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{b}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}{a^2\sin^2\omega + (\cos\omega + b\,\mathrm{sinc}(\omega))^2}.$$

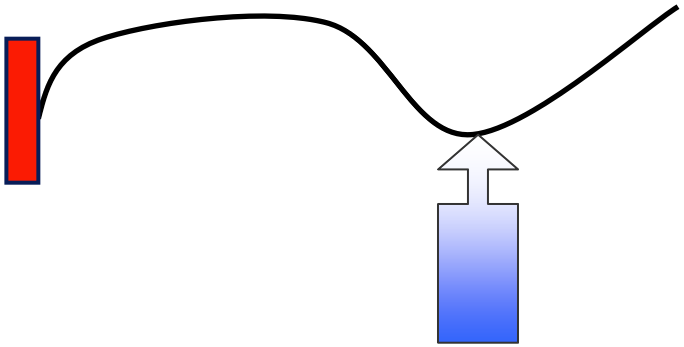
Institut ELIE CARTAN

Calcules approchés



Un problème de placement optimal des capteurs et d'actionneurs

Formulation du problème



$$\begin{cases} \ddot{z} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial t}\big(z(\xi,t)\big)\delta_\xi = 0, \\ z(0,t) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(\pi,t) = 0, \\ z(x,0) = z_0(x), \qquad \dot{z}(x,0) = w_0(x), \end{cases}$$

Main steps of the proof

- If the actuator is located at the middle of the string then the eigenvalues are situated on a vertical line
- If the actuator is located at the middle of the string then the the eigenvectors form a Riesz basis
- For any other location of the actuator show that there is an eigenvalue situated to the left of this vertical line

$\omega_0(\xi)$ Le taux de croissance du semi-groupe associé

Theorem 3.(K. Ammari, A. Henrot and M.T.).

$$\omega_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln(3) \text{ and } \omega_0(\xi) > \omega_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ for any } \xi \in (0,\pi),\ \xi \neq \frac{\pi}{2}.$$

In other words the fastest decay rate is obtained if the actuator is located at the middle of the string.

Remark. The same result for the corresponding beam problem (Euler-Bernoulli) holds for high frequencies (Ammari and Saidi).

Conclusions et perspectives