

# Approche géométrique pour le contrôle frontière

Y. Le Gorrec

LAGEP University Lyon 1

with B. Maschke, H. Zwart and J. Villegas

## Introduction

- Contexte
- Systèmes considérés
- Position du problème
- Approche unifiée
- Exemple

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# Introduction

# Contexte

## Introduction

- **Contexte**
- Systèmes considérés
- Position du problème
- Approche unifiée
- Exemple

## Structure de Dirac et SHP

## BCS associé à $\mathcal{J}_e$

## BCS associé à $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

## BF, stabilité etc ...

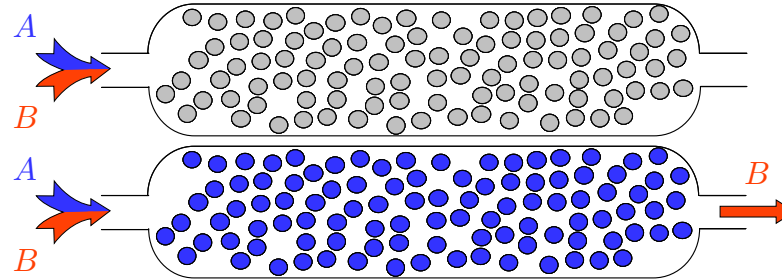
## Conclusion

- ~> Systèmes décrits par des EDP linéaires. Formulation sous forme de **Système de Contrôle Frontière**. Relation possible avec les systèmes abstraits.
- ~> Approche géométrique basée sur une formulation énergétique.
- ~> Paramétrisation des variables frontières et caractérisation des solutions associées.
- ~> Généralisation à des problèmes de commande à la frontière.
- ~> Liens étroits avec une méthode de réduction géométrique et de synthèse de lois de commande (PBC).

# Type de systèmes considérés

↪ Systèmes décrits par des **opérateurs différentiels antisymétriques** : équation d'ondes, poutres (Bernoulli, Timoshenko, ...).

↪ Systèmes **avec dissipation**: exemple du réacteur tubulaire ou de la colonne d'adsorption



Adsorption avec accumulation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - v \frac{\partial C}{\partial z} - \epsilon k_0 (KC - C_p) \\ \frac{\partial C_p}{\partial t} = +\epsilon k_0 (KC - C_p) \\ + \text{Conditions limites} \end{array} \right. \quad (1)$$

Introduction

- Contexte
- **Systèmes considérés**
- Position du problème
- Approche unifiée
- Exemple

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

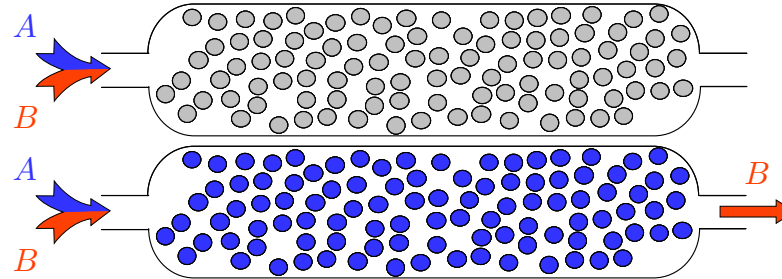
BF, stabilité etc ...

Conclusion

# Type de systèmes considérés

↪ Systèmes décrits par des **opérateurs différentiels antisymétriques** : équation d'ondes, poutres (Bernoulli, Timoshenko, ...).

↪ Systèmes **avec dissipation**: exemple du réacteur tubulaire ou de la colonne d'adsorption



Réaction chimique  $A \rightarrow B$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} = \underbrace{D_a \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}_{\text{sym.}} - \underbrace{v \frac{\partial C}{\partial z}}_{\text{anti sym.}} - \underbrace{k_0 C}_{\text{sym.}} \\ + \text{Conditions limites} \end{array} \right. \quad (1)$$

Introduction

- Contexte
- **Systèmes considérés**
- Position du problème
- Approche unifiée
- Exemple

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# Position du problème

On considère la classe de systèmes suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, z) = (\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*) \mathcal{L}x(t, z), \quad x(0, z) = x_0(z), \quad (2)$$

Quel type de conditions frontières peuvent être choisies ?

Introduction

- Contexte
- Systèmes considérés
- **Position du problème**
- Approche unifiée
- Exemple

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# Position du problème

On considère la classe de systèmes suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, z) = (\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*) \mathcal{L}x(t, z), \quad x(0, z) = x_0(z), \quad (2)$$

**Quel type de conditions frontières peuvent être choisies ?**

Habituellement :

- On impose des conditions de Dirichlet, Dankwert, ...
- L'existence et la nature des solutions sont déterminées en utilisant la théorie des semi-groupes.

Introduction

- Contexte
- Systèmes considérés
- **Position du problème**
- Approche unifiée
- Exemple

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# Position du problème

On considère la classe de systèmes suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, z) = (\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*) \mathcal{L}x(t, z), \quad x(0, z) = x_0(z), \quad (2)$$

**Quel type de conditions frontières peuvent être choisies ?**

Habituellement :

- On impose des conditions de Dirichlet, Dankwert, ...
- L'existence et la nature des solutions sont déterminées en utilisant la théorie des semi-groupes.

Notre approche

- Formulation géométrique, définition des variables d'effort et de flux
- Paramétrisation des conditions limites "admissibles" à l'aide des semigroupes.
- Analyse de la stabilité et formulation de lois de commande stabilisante (asymptotiquement ou exponentiellement)

Introduction

- Contexte
- Systèmes considérés
- **Position du problème**
- Approche unifiée
- Exemple

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

## Utilisation de résultats obtenus pour les systèmes décrits par des opérateurs différentiels antisymétriques

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, z) = (\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*) \mathcal{L}x(t, z), \quad x(0, z) = x_0(z), \quad (3)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} f \\ f_p \end{pmatrix} = \mathcal{J}_e \begin{pmatrix} e \\ e_p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J} & \mathcal{G}_R \\ -\mathcal{G}_R^* & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ e_p \end{pmatrix}$$

avec  $e_p = S f_p$  où  $S$  est un opérateur coercif

$$\begin{pmatrix} f \\ f_p \end{pmatrix} \in \mathcal{F}, \quad \begin{pmatrix} e \\ e_p \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \text{ and } \mathcal{E} = \mathcal{F} = L_2((a, b), \mathbb{R}^n) \times L_2((a, b), \mathbb{R}^n)$$

### Introduction

- Contexte
- Systèmes considérés
- Position du problème
- **Approche unifiée**
- Exemple

### Structure de Dirac et SHP

### BCS associé à $\mathcal{J}_e$

### BCS associé à $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

### BF, stabilité etc ...

### Conclusion

## Exemple du réacteur tubulaire

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( vC - D_a \frac{\partial C}{\partial z} \right) - k_0 C$$

D'un point de vue géométrique :

$$\begin{pmatrix} f \\ f_p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -v \frac{\partial}{\partial z} & \sqrt{D_a} \frac{\partial}{\partial z} + \sqrt{K_0} \\ \sqrt{D_a} \frac{\partial}{\partial z} - \sqrt{K_0} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}_e} \begin{pmatrix} e \\ e_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p \end{pmatrix}$$

### Introduction

- Contexte
- Systèmes considérés
- Position du problème
- Approche unifiée
- **Exemple**

### Structure de Dirac et SHP

### BCS associé à $\mathcal{J}_e$

### BCS associé à $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

### BF, stabilité etc ...

### Conclusion

## Exemple du réacteur tubulaire

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( vC - D_a \frac{\partial C}{\partial z} \right) - k_0 C$$

D'un point de vue géométrique :

$$\begin{pmatrix} f \\ f_p \\ f_{p1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 1 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}_e} \begin{pmatrix} e \\ e_p \\ e_{p1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_p \\ e_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_a & -v \\ 0 & k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p \\ f_{p1} \end{pmatrix}$$

### Introduction

- Contexte
- Systèmes considérés
- Position du problème
- Approche unifiée
- Exemple

### Structure de Dirac et SHP

### BCS associé à $\mathcal{J}_e$

### BCS associé à $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

### BF, stabilité etc ...

### Conclusion

## Introduction

### Structure de Dirac et SHP

- Structure de Dirac
- PHS
- Formulation constructive
- Variables de port

### BCS associé à $\mathcal{J}_e$

### BCS associé à $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

### BF, stabilité etc ...

## Conclusion

## Références

# Structure de Dirac et SHP définis sur des espaces de Hilbert

# Formulation générale

Soit le systèmes défini par :

$$f = \mathcal{J}e$$

- On définit l' **espace des variables de flux**,  $\mathcal{F}$ , et l'**espace des variables d'effort**,  $\mathcal{E}$ , comme des espaces de Hilbert réels.

- L'espace des **variables de liaison** est défini par  $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$  équipé du produit naturel

$$\langle b^1, b^2 \rangle = \langle f^1, f^2 \rangle_{\mathcal{F}} + \langle e^1, e^2 \rangle_{\mathcal{E}}, \quad b^1 = (f^1, e^1), b^2 = (f^2, e^2) \in \mathcal{B}$$

Pour définir la structure de Dirac structure, on associe à  $\mathcal{B}$  un *produit symétrique canonique*, i.e., une forme bilinéaire définie par:

$$\langle b^1, b^2 \rangle_+ = \langle f^1, r_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} e^2 \rangle_{\mathcal{F}} + \langle e^1, r_{\mathcal{F}, \mathcal{E}} f^2 \rangle_{\mathcal{E}}, \quad b^1 = (f^1, e^1), b^2 = (f^2, e^2) \in \mathcal{B}. \quad (4)$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

- Structure de Dirac
- PHS
- Formulation constructive
- Variables de port

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

# Définition sur les espace de Hilbert

Soit  $\mathcal{D}^\perp$  le sous espace orthogonal à  $\mathcal{D}$  respectivement au produit symétrique:

$$\mathcal{D}^\perp = \left\{ b \in \mathcal{B} \mid \langle b, b' \rangle_+ = 0 \text{ for all } b' \in \mathcal{D} \right\}. \quad (5)$$

**Définition :** Une structure de Dirac  $\mathcal{D}$  sur l'espace de liaison  $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$  est un sous espace de  $\mathcal{B}$  qui est maximale-ment isotropique respectivement au produit symétrique, c'àd.,

$$\mathcal{D}^\perp = \mathcal{D}. \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \text{Conservation de puissance}$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

- Structure de Dirac
- PHS
- Formulation constructive
- Variables de port

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

# Systemes Hamiltoniens à Ports

↪ Définition basée sur la **structure de Dirac** est sur la fonction **Hamiltonienne** (énergie totale du système).

**Définition :** Soient  $\mathcal{B} = \mathcal{E} \times \mathcal{F}$  l'espace des liaisons défini plus haut,  $\mathcal{D}$  la structure de Dirac et  $\mathcal{H}(x)$  avec  $x$  le vecteur des variables d'énergie la fonction Hamiltonienne. On définit les variables de flux,  $f \in \mathcal{F}$  comme les dérivées temporelles des variables d'effort et les variables d'effort  $e \in \mathcal{E}$  comme les dérivées variationnelles de  $\mathcal{H}(x)$ . Le systèmes

$$(f, e) = \left( \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} \right) \in \mathcal{D}$$

est un système **Hamiltonien à Ports** dont l'énergie totale est  $\mathcal{H}(x)$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

- Structure de Dirac
- **PHS**
- Formulation constructive
- Variables de port

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R \mathcal{S} \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

Soit l'opérateur différentiel  $\mathcal{J}_e$

$$\mathcal{J}_e e_e = \sum_{i=0}^N \tilde{P}_i \frac{d^i e_e}{dz^i} \quad z \in [a, b],$$

avec  $e_e \in H^N((a, b); \mathbb{R}^n)$  and  $P(i), i = 0, \dots, N$ , est une matrice de dimensions  $n \times n$  avec  $P_N$  non singulier et  $P_i = P_i^T (-1)^{i+1}$ . Définissons

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 & \tilde{P}_3 & \cdots & \tilde{P}_{N-1} & \tilde{P}_N \\ -\tilde{P}_2 & -\tilde{P}_3 & -\tilde{P}_4 & \cdots & \tilde{P}_N & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{N-1} \tilde{P}_N & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

**Réacteur tubulaire**

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial t} \\ f_p \end{pmatrix}}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{k_0} \\ -\sqrt{k_0} & 0 \end{pmatrix}}_{P_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} -v & \sqrt{D_a} \\ \sqrt{D_a} & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ e_p \end{pmatrix}}_e, \quad Q = P_1$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

- Structure de Dirac
- PHS
- **Formulation constructive**
- Variables de port

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

## Définition des variables de port

En utilisant le théorème de Stoke's

$$\int_a^b e_{e,1}^T(z) (\mathcal{J}_e e_{e,2})(z) + e_{e,2}^T(z) (\mathcal{J}_e e_{e,1})(z) dz = \left[ \left( e_{e,1}^T(z), \dots, \frac{d^{N-1} e_{e,1}^T}{dz^{N-1}}(z) \right) Q \begin{pmatrix} e_{e,2}(z) \\ \vdots \\ \frac{d^{N-1} e_{e,2}}{dz^{N-1}}(z) \end{pmatrix} \right]_a^b, \quad (7)$$

A partir de  $Q$  on peut définir l'égalité suivante:

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} = R_{\text{ext}}^T \Sigma R_{\text{ext}},$$

où

$$R_{\text{ext}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} Q & -Q \\ I & I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

- Structure de Dirac
- PHS
- Formulation constructive
- Variables de port

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

↪ On définit le **produit symétrique** (ne dépendant pas de  $\mathcal{J}$ ) et **les variables de port** associées à  $\mathcal{J}$ .

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{E} = L^2((a, b); \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{nN}$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$  munis du produit symétrique suivant :

$$\begin{aligned} & \langle (f^1, f_{\partial}^1, e^1, e_{\partial}^1) (f^2, f_{\partial}^2, e^2, e_{\partial}^2) \rangle_+ \\ &= \langle e^1, f^2 \rangle_{L^2} + \langle e^2, f^1 \rangle_{L^2} - \langle e_{\partial}^1, f_{\partial}^2 \rangle - \langle e_{\partial}^2, f_{\partial}^1 \rangle, \end{aligned}$$

**Définition :** Les variables de port  $(e_{\partial}, f_{\partial}) \in \mathbb{R}^{nN}$  associées à  $\mathcal{J}$  sont définies par :

$$\begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix} = R_{\text{ext}} \begin{pmatrix} e(b) \\ \vdots \\ \frac{d^{N-1}e}{dz^{N-1}}(b) \\ e(a) \\ \vdots \\ \frac{d^{N-1}e}{dz^{N-1}}(a) \end{pmatrix}, \quad R_{\text{ext}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Q & -Q \\ I & I \end{pmatrix}$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

- Structure de Dirac
- PHS
- Formulation constructive
- **Variables de port**

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

**Théorème :** Le sous espace  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  de  $\mathcal{B}$  défini par

$$\mathcal{D}_{\mathcal{J}} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f_{\partial} \\ e \\ e_{\partial} \end{pmatrix} \mid e \in H^N((a, b); \mathbb{R}^n), \mathcal{J}e = f, \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix} = R_{\text{ext}} \begin{pmatrix} e(b) \\ \vdots \\ \partial_z^{N-1} e(a) \end{pmatrix} \right\}$$

est une structure de Dirac, c'est à dire  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\perp}$ .

### Réacteur tubulaire

$$R_{\text{ext}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -v & \sqrt{D_a} & v & -\sqrt{D_a} \\ \sqrt{D_a} & 0 & -\sqrt{D_a} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{f, \partial} \\ g_{e, \partial} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -v(C(b) - C(a)) + D_a \left( \frac{\partial C}{\partial z}(b) - \frac{\partial C}{\partial z}(a) \right) - \sqrt{k_0 D_a} (C(b) - C(a)) \\ \sqrt{D_a} (C(b) - C(a)) \\ C(b) + C(a) \\ \sqrt{D_a} \left( \frac{\partial C}{\partial z}(b) + \frac{\partial C}{\partial z}(a) \right) - \sqrt{k_0} (C(b) + C(a)) \end{pmatrix}$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

- Structure de Dirac
- PHS
- Formulation constructive
- Variables de port

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R \mathcal{S} \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$   
• Paramétrisation

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

# BCS associé à $\mathcal{J}_e$

# Systemes de contrôle frontière

Soit  $W$  matrice de rang plein telle que  $W\Sigma W^T \geq 0$ . Le système défini par

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t) = \mathcal{J}_e x(t)$$

avec pour entrée

$$u(t) = W \begin{pmatrix} f_{e,\partial}(t) \\ e_{e,\partial}(t) \end{pmatrix}$$

est un système de contrôle frontière. L'opérateur  $A_{\text{ext}} = \mathcal{J}_e$  ayant pour domaine

$$D(A_{\text{ext}}) = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ e_r \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} H^N((a, b), \mathbb{R}^n) \\ H^N((a, b), \mathbb{R}^n) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} f_{e,\partial} \\ e_{e,\partial} \end{pmatrix} \in \ker W \right\}, \quad (10)$$

génère un semigroupe de contraction.

Introduction

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$   
• Paramétrisation

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

# Equation de bilan

Soit  $\tilde{W}$  matrice de rang plein telle que  $\begin{pmatrix} W \\ \tilde{W} \end{pmatrix}$  est inversible. On définit  $\mathcal{C} : H^N((a, b), \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}^{2nN}$  par,

$$\mathcal{C}x(t) := \tilde{W} \begin{pmatrix} f_{e,\partial}(t) \\ e_{e,\partial}(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

et la sortie par

$$y(t) = \mathcal{C}x(t), \quad (12)$$

alors pour  $u \in C^2((0, \infty); \mathbb{R}^{2nN})$ ,  $x(0) \in H^N((a, b), \mathbb{R}^{2n})$ , et  $\mathcal{B}x(0) = u(0)$  :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^T(t) & y^T(t) \end{pmatrix} P_{W, \tilde{W}} \begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

où

$$P_{W, \tilde{W}}^{-1} = \begin{bmatrix} W \Sigma W^T & W \Sigma \tilde{W}^T \\ \tilde{W} \Sigma W^T & \tilde{W} \Sigma \tilde{W}^T \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

- Variables de port
- Propriétés des semigroupes
- BCS
- Equation de bilan
- Retour à l'exemple

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# BCS associé à $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

# Variables de port

Le feedback est maintenant fermé *i.e.*

$$f = \mathcal{J}e - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^* e,$$

Les variables de port deviennent :

$$\begin{pmatrix} g_{f,\partial} \\ g_{e,\partial} \end{pmatrix} = R_{\text{ext}} \begin{pmatrix} e(b) \\ (-S\mathcal{G}_R^* e)(b) \\ \vdots \\ \frac{d^{N-1}e}{dz^{N-1}}(b) \\ \frac{d^{N-1}(-S\mathcal{G}_R^* e)}{dz^{N-1}}(b) \\ e(a) \\ (-S\mathcal{G}_R^* e)(a) \\ \vdots \\ \frac{d^{N-1}(-S\mathcal{G}_R^* e)}{dz^{N-1}}(a) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

- Variables de port
- Propriétés des semigroupes
- BCS
- Equation de bilan
- Retour à l'exemple

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# Propriétés des semigroupes

Considérons l'opérateur

$$A = (\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*)$$

ayant pour domaine

$$D(A) = \left\{ e \in H^N((a, b); \mathbb{R}^n) \mid S \mathcal{G}_R^* e \in H^N((a, b); \mathbb{R}^n), \right. \quad (16)$$

$$\left. \begin{pmatrix} g_{f, \partial} \\ g_{e, \partial} \end{pmatrix} \in \ker W \right\}. \quad (17)$$

Si  $W$  est de rang plein et satisfait  $W \Sigma W^T \geq 0$ , alors  $A$  génère un semigroupe de contraction.

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

- Variables de port
- Propriétés des semigroupes
- BCS
- Equation de bilan
- Retour à l'exemple

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Considérons  $W$  matrice de rang plein satisfaisant  $W\Sigma W^T \geq 0$ . Le système,

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t) = (\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*) x(t) \quad (18)$$

ayant pour entrée

$$u(t) = \mathcal{B}x(t) = W \begin{pmatrix} g_{f,\partial}(t) \\ g_{e,\partial}(t) \end{pmatrix} \quad (19)$$

est un système de contrôle frontière. De plus l'opérateur  $A = \mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$  ayant pour domaine

$$D(A) = \left\{ e \in H^N((a, b); \mathbb{R}^n) \mid S \mathcal{G}_R^* e \in H^N((a, b); \mathbb{R}^n), \right. \quad (20)$$

$$\left. \begin{pmatrix} g_{f,\partial} \\ g_{e,\partial} \end{pmatrix} \in \ker W \right\}. \quad (21)$$

génère un semigroupe de contraction.

Introduction

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

- Variables de port
- Propriétés des semigroupes
- **BCS**
- Equation de bilan
- Retour à l'exemple

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# Equation de bilan

Soit  $\tilde{W}$  une matrice de rang plein telle que  $\begin{pmatrix} W \\ \tilde{W} \end{pmatrix}$  est inversible. On définit  $\mathcal{C} : H^N((a, b), \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}^{2nN}$  tel que,

$$\mathcal{C}x(t) := \tilde{W} \begin{pmatrix} g_{f,\partial}(t) \\ g_{e,\partial}(t) \end{pmatrix} \quad (22)$$

et la sortie par

$$y(t) = \mathcal{C}x(t), \quad (23)$$

alors pour  $u \in C^2((0, \infty); \mathbb{R}^{2nN})$ ,  $x(0) \in H^N((a, b), \mathbb{R}^{2n})$ , et  $\mathcal{B}x(0) = u(0)$  l'équation de bilan suivante est satisfaite:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^T(t) & y^T(t) \end{pmatrix} P_{W, \tilde{W}} \begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

où

$$P_{W, \tilde{W}}^{-1} = \begin{bmatrix} W \Sigma W^T & W \Sigma \tilde{W}^T \\ \tilde{W} \Sigma W^T & \tilde{W} \Sigma \tilde{W}^T \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

- Variables de port
- Propriétés des semigroupes
- BCS
- **Equation de bilan**
- Retour à l'exemple

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# Retour à l'exemple

**Réacteur tubulaire** Les conditions de Dankwert sont :

$$D_a \frac{\partial C}{\partial z}(t, a) - vC(t, a) = vC_{in}(t), \quad \text{and} \quad D_a \frac{\partial C}{\partial z}(t, b) = 0, \quad (26)$$

Or

$$\begin{pmatrix} g_{f,\partial} \\ g_{e,\partial} \end{pmatrix} = R_{ext} \begin{pmatrix} C(b) \\ \sqrt{D_a} \frac{\partial C}{\partial z}(b) - \sqrt{k_0} C(b) \\ C(a) \\ \sqrt{D_a} \frac{\partial C}{\partial z}(a) - \sqrt{k_0} C(a) \end{pmatrix} \quad (27)$$

Donc

$$\begin{pmatrix} vC_{in} \\ 0 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} g_{f,\partial} \\ g_{e,\partial} \end{pmatrix}$$

avec

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & \frac{v}{2\sqrt{D_a}} & -\frac{v}{2} & \sqrt{D_a} \\ 1 & \frac{v + \sqrt{k_0} D_a}{\sqrt{D_a}} & \sqrt{k_0} D_a & \sqrt{D_a} \end{pmatrix}, \quad W \Sigma W^T = \begin{bmatrix} v & v \\ v & v \end{bmatrix} \geq 0$$

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

- Variables de port
- Propriétés des semigroupes
- BCS
- Equation de bilan
- **Retour à l'exemple**

BF, stabilité etc ...

Conclusion

# BF, stabilité etc ...

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

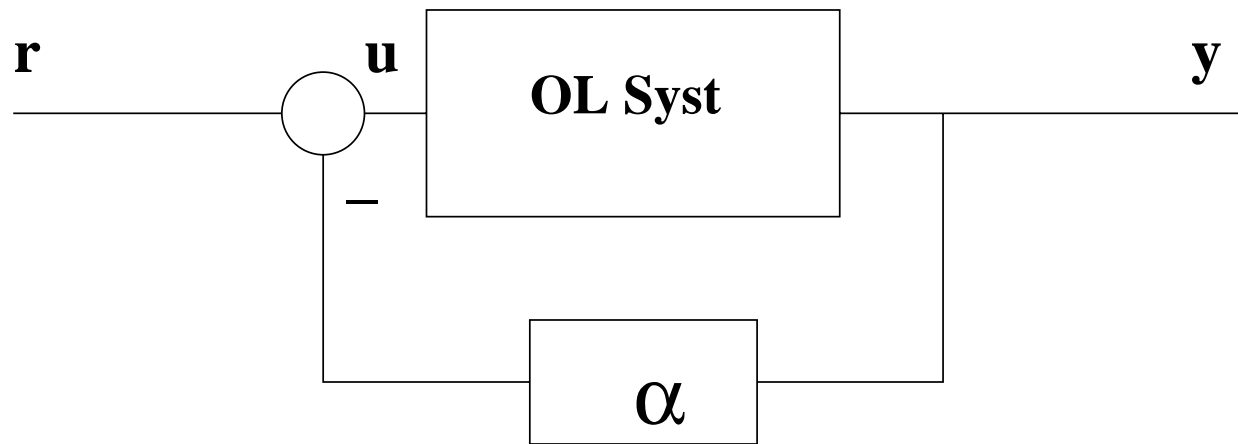
**BF, stabilité etc ...**

- Feedback statique
- Stabilité
- Généralisation
- Stabilité exponentielle

Conclusion

Références

# Feedback statique



Systeme boucle ouverte

$$\dot{x} = \mathcal{J}x$$

$$u = W_{imp} \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix}$$

$$y = C_{imp} \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix}$$

Systeme boucle fermée

$$\dot{x} = \mathcal{J}x$$

$$r = (W_{imp} + \alpha C_{imp}) \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix}$$

$$y = C_{imp} \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix}$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

- Feedback statique
- Stabilité
- Généralisation
- Stabilité exponentielle

Conclusion

Références

**Lemme :** Le système en boucle fermée défini par:

$$\dot{x} = \mathcal{J}_{\mathcal{L}}x$$

$$r = (W_{imp} + \alpha C_{imp}) \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix}$$

$$y = C_{imp} \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix}$$

est un **système de contrôle frontière**. De plus, l'opérateur  $A_s = \mathcal{J}_{\mathcal{L}}|_{D(A_s)}$  génère un **semigroupe de contraction** sur  $X = L_2((a, b); \mathbb{R}^n)$  où

$$D(A_s) = \left\{ x \in D(\mathcal{J}) \mid \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix} \in \ker \tilde{W} \right\}$$

et  $\tilde{W} = (W_{imp} + \alpha C_{imp})$  matrice de rang plein de  $\dim.nN \times 2nN$

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

- Feedback statique
- Stabilité
- Généralisation
- Stabilité exponentielle

Conclusion

Références

**Théorème :**  $(\lambda - A_s)^{-1} : X \rightarrow X$  est un opérateur compact pour  $\lambda > 0$ . Le système défini par ( $VV^T = 0$ ) :

$$\dot{x} = \mathcal{J}x$$

$$r = (W_{imp} + \alpha C_{imp}) \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix}$$

$$y = C_{imp} \begin{pmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{pmatrix}$$

avec  $r = 0$  est **globalement asymptotiquement stable**.

Quelque soit  $x(0) \in X$  l'unique solution (au sens classique ou faible)  $x(t) = T(t)x(0)$  du système en boucle fermée approche asymptotiquement de zéro, càd

$$\lim_{\infty} \|x(t)\|_X = 0$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

- Feedback statique
- **Stabilité**
- Généralisation
- Stabilité exponentielle

Conclusion

Références

**Théorème :** Si  $W\Sigma W^T > 0$  le système défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{J}x \\ r &= W \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} \\ y &= C \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec  $r = 0$  est **globalement asymptotiquement stable**.

Quelque soit  $x(0) \in X$  l'unique solution (au sens classique ou faible)  $x(t) = T(t)x(0)$  du système en boucle fermée approche asymptotiquement de zéro, càd

$$\lim_{\infty} \|x(t)\|_X = 0$$

Introduction

Structure de Dirac et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

- Feedback statique
- Stabilité
- **Généralisation**
- Stabilité exponentielle

Conclusion

Références

Dans le cas où

$$\frac{\partial x(t, z)}{\partial t} = P_1 \frac{\partial (\mathcal{L}x(t, z))}{\partial t} + (P_0 - G_0) \mathcal{L}x(t, z)$$

On peut montrer que ( $\alpha \geq 0$ )

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t)\|_{\mathcal{L}}^2 = -\langle \alpha y(t), y(t) \rangle_U - \langle G_0 \mathcal{L}x(t), \mathcal{L}x(t) \rangle_{L_2},$$

Le système est exponentiellement stable si

$$|(\mathcal{L}x)(b)|_{\mathbb{R}}^2 \leq k_1 (\langle \alpha y(t), y(t) \rangle_U + \langle G_0 \mathcal{L}x(t), \mathcal{L}x(t) \rangle_{L_2})$$

ou

$$|(\mathcal{L}x)(a)|_{\mathbb{R}}^2 \leq k_1 (\langle \alpha y(t), y(t) \rangle_U + \langle G_0 \mathcal{L}x(t), \mathcal{L}x(t) \rangle_{L_2})$$

avec  $k_1 > 0$ .

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

- Feedback statique
- Stabilité
- Généralisation
- **Stabilité exponentielle**

Conclusion

Références

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

- Conclusion

Références

# Conclusion

# Conclusion

- Méthode constructive (conditions sur des matrices)
- Méthode unifiée: résultat "dissipatif" obtenu à partir des systèmes "non dissipatifs"
- Relations simples avec les autres formalismes : system nodes, systèmes bien posés, espaces de Krein ...
- Associée à une méthode de réduction géométrique, et de synthèse de type énergétique

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

• Conclusion

Références

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

# Références

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

- [1] Y. Le Gorrec, H. Zwart and B. Maschke, Dirac structures and Boundary Control Systems associated with Skew-Symmetric Differential Operators *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol: 44 Issue 5, pages 1864-1892, 2005.
- [2] Y. Le Gorrec, H.Zwart and B. Maschke, A semigroup approach to Port Hamiltonian systems associated with linear skew-symmetric operators *In proc. of MTNS*, Leuven, 4-11 July 2004.
- [3] J.A. Villegas, Y. Le Gorrec and H.Zwart, Boundary control systems and the system node *In proc. of IFAC World Congress*, Pragma, 25 July 2005.
- [4] J. Villegas, H. Zwart, Y. Le Gorrec, B. Maschke, and A. J. van de Schaft, Stability and Stabilization of a Class of Boundary Control Systems *In proc. of the 45th IEEE CDC-ECC conference*, Seville, Spain , 2005.

Introduction

Structure de Dirac  
et SHP

BCS associé à  $\mathcal{J}_e$

BCS associé à  
 $\mathcal{J} - \mathcal{G}_R S \mathcal{G}_R^*$

BF, stabilité etc ...

Conclusion

Références

- [5] H. Zwart, Y. Le Gorrec, B. Maschke, J. Andres Villegas, Well-Posedness and regularity for a class of hyperbolic control systems *In proc. of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems* July 24-28, 2006, in Kyoto, Japan.
- [6] J. Villegas, Y. Le Gorrec, H. Zwart, B. Maschke, Boundary control for a class of dissipative differential operators including diffusion systems *In proc. of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems* July 24-28, 2006, in Kyoto, Japan.