

Contrôlabilité uniforme de systèmes de contrôle semi-discrétisés

Stéphane Labbé¹ Emmanuel Trélat²

¹Université Grenoble, IMAG, LJK.

²Université d'Orléans, Laboratoire MAPMO.

GdT EDP, GDR MACS, LAGEP.



- X, U : espaces de Hilbert,
- $A : D(A) \rightarrow X$ opérateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$,
- B opérateur de contrôle (en général, non borné) sur U .

Systeme de contrôle

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = y_0, \quad (S)$$

où $y(t) \in X, u(t) \in U$.



Semi-discrétisation en espace (e.g. différences finies, éléments finis, ...)

- X_h, U_h : espaces de dimension finie,
- $A_h : X_h \rightarrow X_h$ opérateur linéaire
- $B_h : U_h \rightarrow X_h$ opérateur linéaire.

Famille de systèmes semi-discrétisés

$$\dot{y}_h(t) = A_h y_h(t) + B_h u_h(t), \quad y_h(0) = y_{h,0}, \quad (S_h)$$

où $y_h(t) \in X_h, u_h(t) \in U_h$.



Système continu (\mathcal{S})

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), y(0) = y_0$$

Famille de systèmes semi-discrétisés (\mathcal{S}_h)

$$\dot{y}_h(t) = A_h y_h(t) + B_h u_h(t), y_h(0) = y_{h,0}$$

Hypothèse : (\mathcal{S}) est contrôlable (en temps T).

Soit $y_1 \in X$. Alors, $\exists u$ | la solution $y(\cdot)$ de (\mathcal{S}) vérifie $y(T) = y_1$.

Question

Est-il possible de déterminer des contrôles u_h , pour $0 < h < h_0$, convergeant vers u lorsque $h \rightarrow 0$, et tels que les solutions $y_h(\cdot)$ de (\mathcal{S}_h) convergent vers $y(\cdot)$? Algorithme efficace ?

Remarque. Cas LQR : Banks-Kunisch, Banks-Ito-Wang, Gibson, Kappel-Salamon, Lasiecka-Triggiani, Liu-Zheng, Ramdani-Takahashi-Tucsnak.



Système continu (\mathcal{S})

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = y_0$$

Famille de systèmes semi-discrétisés (\mathcal{S}_h)

$$\dot{y}_h(t) = A_h y_h(t) + B_h u_h(t), \quad y_h(0) = y_{h,0}$$

Question

Est-il possible de déterminer des contrôles u_h , pour $0 < h < h_0$, convergeant vers u lorsque $h \rightarrow 0$, et tels que les solutions $y_h(\cdot)$ de (\mathcal{S}_h) convergent vers $y(\cdot)$? Algorithme efficace ?

Quelques références

- Glowinski-Lions, Acta Numerica, 1996.
- Chaleur 1D : Lopez-Zuazua, Sémin. X, 1998.
- Ondes 1D : Infante-Zuazua, M2AN 1999 ; Negreanu-Zuazua, 2003 ; Ondes 2D : Castro-Micu, Numer. Math., 2006.
- Poutre 1D : Leon-Zuazua, COCV, 2002.
- Schrödinger 1D : Zuazua, SIAM Rev., 2005.
- Chaleur 2D : Zuazua, Proc. ICM 06.
- ...

Contrôlabilité en dimension finie

$T > 0$ fixé. Système de contrôle linéaire en dimension finie :

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (1)$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, et $u(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Définition

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système (1) est *contrôlable depuis y_0 en temps T* si $\forall y_1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists u(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que la solution correspondante $y(\cdot)$, avec $y(0) = x_0$, vérifie $y(T) = x_1$.

Théorème

Le système (1) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$G = \int_0^T e^{(T-t)A} B B^* e^{(T-t)A^*} dt \text{ (appelée Gramienne) est inversible.}$$

En dimension finie, cela est équivalent à l'existence de $\alpha > 0$ tel que

$$\int_0^T \|B^* e^{(T-t)A^*} \psi\|^2 dt \geq \alpha \|\psi\|^2,$$

pour tout $\psi \in \mathbb{R}^n$ (inégalité d'observabilité).



Contrôlabilité en dimension infinie

X, U : Hilbert ; $S(t)$: semi-groupe fortement continu sur X , de générateur $(A, D(A))$.

Définition (opérateur de contrôle admissible)

$B \in L(U, X_{-1})$ est *admissible* pour $S(t)$ si toute solution de

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (2)$$

avec $y(0) = y_0 \in X$ et $u(\cdot) \in L^2(0, +\infty; U)$, vérifie $y(t) \in X, \forall t \geq 0$. Dans ce cas, $y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds$.

Définition (contrôlabilité exacte)

Pour $y_0 \in X$, et $T > 0$, le système (2) est *exactement contrôlable* depuis y_0 en temps T si $\forall y_1 \in X, \exists u(\cdot) \in L^2(0, T; U)$ tel que la solution correspondante de (2), avec $y(0) = y_0$, vérifie $y(T) = y_1$.

Théorème (inégalité d'observabilité)

Le système (2) est exactement contrôlable en temps T

$$\iff \exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \int_0^T \|B^* S^*(t)\psi\|_U^2 dt \geq \alpha \|\psi\|_X^2, \quad \forall \psi \in D(A^*).$$



Denis Polsson

Contrôlabilité en dimension infinie

X, U : Hilbert ; $S(t)$: semi-groupe fortement continu sur X , de générateur $(A, D(A))$.

Définition (opérateur de contrôle admissible)

$B \in L(U, X_{-1})$ est *admissible* pour $S(t)$ si toute solution de

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (2)$$

avec $y(0) = y_0 \in X$ et $u(\cdot) \in L^2(0, +\infty; U)$, vérifie $y(t) \in X, \forall t \geq 0$. Dans ce cas, $y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds$.

Définition (contrôlabilité exacte à zéro)

Pour $T > 0$, le système (2) est *exactement contrôlable à zéro* en temps T si $\forall y_0 \in X, \exists u(\cdot) \in L^2(0, T; U)$ tel que la solution correspondante de (2), avec $y(0) = y_0$, vérifie $y(T) = 0$.

Théorème (inégalité d'observabilité à zéro)

Le système (2) est exactement contrôlable à zéro en temps T

$$\iff \exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \int_0^T \|B^* S^*(t)\psi\|_U^2 dt \geq \alpha \|S(T)^*\psi\|_X^2, \quad \forall \psi \in D(A^*).$$



Denis Polsson

Pour $\psi \in D(A^*)$, on pose

$$J(\psi) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* S(t)^* \psi\|_U^2 dt + \langle S(T)^* \psi, y_0 \rangle_X. \quad (3)$$

J est strictement convexe, et, d'après l'inégalité d'observabilité, est coercive. Soit ψ un minimiseur. Définissons

$$u(t) = B^* S(T - t)^* \psi,$$

pour tout $t \in [0, T]$, et soit $y(\cdot)$ la solution correspondante de (2), telle que $y(0) = y_0$. Alors, $y(T) = 0$.

(i.e., observabilité implique contrôlabilité : méthode HUM)



Exemple : équation de la chaleur

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert connexe borné C^2 , $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + cy & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = u & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_2, \end{cases}$$

où $y_0 \in L^2(\Omega)$ et $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Ce système est exactement contrôlable à zéro, en tout temps T , avec $X = L^2(\Omega)$ et $U = L^2(\Gamma_1)$.

Ici : $Ay = \Delta y + cy$, sur $D(A) = \{y \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}$, $B = -AN \in L(U, D(A^*)')$, avec N l'application

de Neumann : $Nu = y \Leftrightarrow \begin{cases} Ay = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = u & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$

B est admissible (résultat de régularité de trace). En fait, il existe $\alpha, \beta > 0$ t.q.

$$\alpha \int_{\Omega} \|\psi(T, x)\|^2 dx \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} \|\psi(t, x)\|^2 dx dt \leq \beta \int_{\Omega} \|\psi(0, x)\|^2 dx,$$

pour tout $\psi(t, x)$ solution de $\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + c\psi & (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = u & [0, T] \times \Gamma. \end{cases}$



Exemple de semi-discrétisation : équation de la chaleur 1-D avec contrôle de Dirichlet (E. Zuazua)

Système continu

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ y(t, 0) = 0, y(t, 1) = u(t), & 0 < t < T, \\ y(0, x) = y_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ce système est exactement contrôlable à zéro, en tout temps T , avec $X = L^2(0, 1)$ et $U = L^2(0, T)$.

En effet, on a l'inégalité d'observabilité :

$$\forall T > 0 \quad \exists \alpha_T > 0 \quad \text{s.t.} \quad \int_0^T \psi_x(t, L)^2 dt \geq \alpha_T \int_0^L \psi(T, x)^2 dx,$$

pour toute solution de $\begin{cases} \psi_t = \psi_{xx}, & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, & 0 < t < T. \end{cases}$



Exemple de semi-discrétisation : équation de la chaleur 1-D avec contrôle de Dirichlet (E. Zuazua)

Système continu

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ y(t, 0) = 0, y(t, 1) = u(t), & 0 < t < T, \\ y(0, x) = y_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ce système est exactement contrôlable à zéro, en tout temps T , avec $X = L^2(0, 1)$ et $U = L^2(0, T)$.

Système semi-discrétisé (par différences finies)

$$\begin{aligned} y_j'(t) &= \frac{y_{j+1}(t) - 2y_j(t) + y_{j-1}(t)}{h^2}, & 0 < t < T, j = 1, \dots, N, \\ y_0(t) &= 0, y_{N+1}(t) = u(t), & 0 < t < T, \\ y_j(0) &= y_{0,j}, & j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$



Exemple de semi-discrétisation : équation de la chaleur 1-D avec contrôle de Dirichlet (E. Zuazua)

Système continu

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, \\ y(t, 0) = 0, \quad y(t, 1) = u(t), \\ y(0, x) = y_0(x). \end{cases}$$

Système semi-discrétisé

$$\begin{aligned} y_j'(t) &= \frac{y_{j+1}(t) - 2y_j(t) + y_{j-1}(t)}{h^2}, \\ y_0(t) &= 0, \quad y_{N+1}(t) = u(t), \\ y_j(0) &= y_{0,j}. \end{aligned}$$

Théorème (Lopez-Zuazua, 1997)

$$\forall T > 0 \quad \exists c_T > 0 \quad \text{t.q.} \quad \int_0^T \left(\frac{\psi_N(t)}{h} \right)^2 dt \geq c_T h \sum_{j=1}^N \psi_j(T)^2,$$

pour tout $h > 0$, et toute solution de

$$\begin{aligned} \psi_j'(t) &= \frac{\psi_{j+1}(t) - 2\psi_j(t) + \psi_{j-1}(t)}{h^2}, & 0 < t < T, \quad j = 1, \dots, N, \\ \psi_0(t) &= 0, \quad \psi_{N+1}(t) = 0, & 0 < t < T. \end{aligned}$$

Cela implique la contrôlabilité exacte à zéro uniforme.

Exemple de semi-discrétisation : équation des ondes 1-D avec contrôle de Dirichlet (E. Zuazua)

Système continu

$$\begin{cases} y_{tt} = y_{xx}, \\ y(t, 0) = 0, \quad y(t, 1) = u(t), \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x). \end{cases}$$

Système semi-discrétisé

$$\begin{aligned} y_j''(t) &= \frac{y_{j+1}(t) - 2y_j(t) + y_{j-1}(t)}{h^2}, \\ y_0(t) &= 0, \quad y_{N+1}(t) = u(t), \\ y_j(0) &= y_{0,j}, \quad y_j'(0) = y_{1,j}. \end{aligned}$$

Théorème (Infante-Zuazua, 1999)

$\forall T > 0 \quad \exists c_{T,h} > 0 \quad \text{t.q.}$

$$\int_0^T \left(\frac{\psi_N(t)}{h} \right)^2 dt \geq c_{T,h} h \sum_{j=1}^N \left(\psi_j'(T)^2 + \left(\frac{\psi_{j+1}(T) - \psi_j(T)}{h} \right)^2 \right),$$

mais

$$c_{T,h} \rightarrow 0$$

lorsque $h \rightarrow 0$!

Théorème (S. Labbé, E.T., *Syst. Cont. Letters*, 2006)

Sous les hypothèses suivantes :

- le semi-groupe $S(t)$ est *analytique* (i.e., cas parabolique),
- le degré de non-bornitude de B est $< 1/2$,
(i.e., $\exists \gamma \in [0, 1/2)$ t.q. $B \in L(U, D((-\hat{A}^*)^\gamma)')$)
- hypothèses d'approximation standards,

► Détails

on a l'équivalence

S est exactement contrôlable à zéro (en temps T) \Leftrightarrow la famille (S_h) est uniformément contrôlable.

(au sens où il existe une inégalité d'observabilité discrète uniforme)

Dans ce cas, la suite de contrôles HUM_h converge vers le contrôle HUM.

Exemple typique :

équation de la chaleur (dans \mathbb{R}^n) avec contrôle frontière de Neumann.



Denis Polson

Théorème (S. Labbé, E.T., *Syst. Cont. Letters*, 2006)

Sous les hypothèses suivantes :

- le semi-groupe $S(t)$ est *analytique* (i.e., cas parabolique),
- le *degré de non-bornitude de B est $< 1/2$, (i.e., $\exists \gamma \in [0, 1/2)$ t.q. $B \in L(U, D((-\hat{A}^*)^\gamma)')$)*
- hypothèses d'approximation standards,

► Détails

on a l'équivalence

\mathcal{S} est exactement contrôlable à zéro (en temps T) \Leftrightarrow la famille (\mathcal{S}_h) est uniformément contrôlable.

(au sens où il existe une inégalité d'observabilité discrète uniforme)

Dans ce cas, la suite de contrôles HUM_h converge vers le contrôle HUM.

Exemple typique :

équation de la chaleur (dans \mathbb{R}^n) avec contrôle frontière de Neumann.



Denis Polson

Théorème (S. Labbé, E.T., *Syst. Cont. Letters*, 2006)

Sous les hypothèses suivantes :

- le semi-groupe $S(t)$ est *analytique* (i.e., cas parabolique),
- le *degré de non-bornitude* de B est $< 1/2$,
(i.e., $\exists \gamma \in [0, 1/2)$ t.q. $B \in L(U, D((-\hat{A}^*)^\gamma)')$)
- **hypothèses d'approximation standards,**

► Détails

on a l'équivalence

\mathcal{S} est exactement contrôlable à zéro (en temps T) \Leftrightarrow la famille (\mathcal{S}_h) est uniformément contrôlable.

(au sens où il existe une inégalité d'observabilité discrète uniforme)

Dans ce cas, la suite de contrôles HUM_h converge vers le contrôle HUM.

Exemple typique :

équation de la chaleur (dans \mathbb{R}^n) avec contrôle frontière de Neumann.



Denis Polson

Simulations numériques pour l'équation de la chaleur avec contrôle de Neumann

$d \geq 1$ entier, $c \in \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ouvert connexe borné, $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Modèle continu

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + cy & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = u & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_2, \end{array} \right.$$

où $y_0 \in L^2(\Omega)$ et $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Ce système est exactement contrôlable à zéro avec $X = L^2(\Omega)$ et $U = L^2(\Gamma_1)$.

Ici, on a $Ay = \Delta y + cy$, sur $D(A) = \left\{ y \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$,
et $B = -AN \in L(U, D(A^*)')$, où N est l'application de Neumann.

Le degré de non bornitude de B est $\gamma = 1/4 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.



Simulations numériques pour l'équation de la chaleur avec contrôle de Neumann

$d \geq 1$ entier, $c \in \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ouvert connexe borné, $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Modèle continu

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + cy & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = u & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_2, \end{cases}$$

où $y_0 \in L^2(\Omega)$ et $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Modèle semi-discret (éléments finis)

$$M_h \dot{Y}(t) = A_h Y(t) + B_h V(t), \quad Y(0) = Y_0.$$



Dimension 1

$\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{1\}$, $\Gamma_2 = \{0\}$, $c = 1$, and $T = 1$.

Subdivision régulière de Ω . Pas de temps : 0.001.

Données :

name	S_h	h	y_0
1D_10	11	10^{-1}	$y_0(x) = x$
1D_100	101	10^{-2}	$y_0(x) = x$
1D_1000	1001	10^{-3}	$y_0(x) = x$
sin1D_10	11	10^{-1}	$y_0(x) = \sin^2(\pi x)$
sin1D_100	101	10^{-2}	$y_0(x) = \sin^2(\pi x)$
sin1D_1000	1001	10^{-3}	$y_0(x) = \sin^2(\pi x)$

Résultats numériques :

name	$\ \psi_h\ _X$	h^β	$\ h^\beta \psi_h + y_h(T)\ _X$	$\ y_h(T)\ _{X_h}$	$\ y_h^u(T)\ _{X_h}$
1D_10	0.413804	0.372	0.00305	0.15670	1.35778
1D_100	0.531854	0.126	0.00369	0.07000	1.35778
1D_1000	0.705366	0.044	0.00399	0.03397	1.35778
sin1D_10	0.413831	0.372	0.00308	0.15671	1.35778
sin1D_100	0.532225	0.126	0.00407	0.07007	1.35778
sin1D_1000	0.705650	0.044	0.00399	0.03398	1.35778

Convergence lente (ici, $\beta/2 = 0.225$).



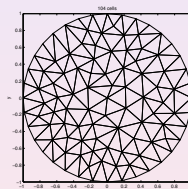
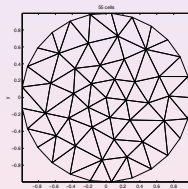
Dimension 2

Ω : disque unité de \mathbf{R}^2 , $c = 1$, et $T = 1$. Pas de temps : 0.001.

Données :

name	S_h	y_0	Γ_1	Γ_2
disk_1	55	$y_0(x, y) = x + y$	Γ	\emptyset
	104	$y_0(x, y) = x + y$	Γ	\emptyset
disk_2	55	$y_0(x, y) = x + y$	$\{(x, y) \in \Gamma \mid x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$	$\Gamma \setminus \Gamma_1$
	104	$y_0(x, y) = x + y$	$\{(x, y) \in \Gamma \mid x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$	$\Gamma \setminus \Gamma_1$

Maillages utilisés :



Résultats numériques :

name	S_h	$\ \psi_h\ _X$	h^β	$\ h^\beta \psi_h + y_h(T)\ _X$	$\ y_h(T)\ _{X_h}$	$\ y_h^U(T)\ _{X_h}$
disk_1	55	0.15872	0.61424	0.01747	0.08030	0.10351
	104	0.23091	0.45112	0.01953	0.08494	0.10852
disk_2	55	0.16497	0.61424	0.01162	0.09623	0.10351
	104	0.17513	0.45112	0.01062	0.10259	0.10861



Qu'en est-il pour l'équation des ondes ?

Equation des ondes 1D, contrôle Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \text{ dans }]0, T[\times]0, 1[, \\ y(t, 0) = 0, y(t, 1) = u(t), \text{ sur }]0, T[. \end{cases}$$

Cette équation est exactement contrôlable lorsque $T \geq 2$. Mais pas d'analyticité du semi-groupe.

Discrétisation : méthode des différences finies.

Ondes 1D : comparaison numérique avec la chaleur

n_p	itér. Gradient chaleur	Itér. Gradient ondes
5	5	15
10	5	40
20	5	249
30	4	842
40	–	1515
50	4	–



- vitesse de convergence des contrôles ;
- condition sur le degré de non-bornitude γ de B ;
- s'affranchir de l'hypothèse d'analyticité (cas hyperbolique) ;
- contrôlabilité uniforme des approximations semi-discrètes d'EDP contrôlées semi-linéaires ou non linéaires.



$(X_h)_{0 < h < h_0}$ et $(U_h)_{0 < h < h_0}$: familles d'espaces vectoriels de dimension finie.

(H₃) $\forall h \in (0, h_0)$, il existe des applications linéaires $P_h : D((-\hat{A}^*)^{1/2})' \rightarrow X_h$ et $\tilde{P}_h : X_h \rightarrow D((-\hat{A}^*)^{1/2})$ (resp., $Q_h : U \rightarrow U_h$ et $\tilde{Q}_h : U_h \rightarrow U$), vérifiant :

(H_{3.1}) $\forall h \in (0, h_0)$ $P_h \tilde{P}_h = id_{X_h}$, and $Q_h \tilde{Q}_h = id_{U_h}$.

(H_{3.2}) $\exists s, C_4 > 0$ t.q., $\forall h \in (0, h_0)$,

$$\begin{aligned}\|(I - \tilde{P}_h P_h)\psi\|_X &\leq C_4 h^s \|A^* \psi\|_X, \\ \|(-\hat{A}^*)^\gamma (I - \tilde{P}_h P_h)\psi\|_X &\leq C_4 h^{s(1-\gamma)} \|A^* \psi\|_X, \quad \forall \psi \in D(A^*), \\ \|(I - \tilde{Q}_h Q_h)u\|_U &\rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0, \quad \forall u \in U, \\ \|(I - \tilde{Q}_h Q_h)B^* \psi\|_U &\leq C_4 h^{s(1-\gamma)} \|A^* \psi\|_X, \quad \forall \psi \in D(A^*).\end{aligned}$$

(H_{3.3}) $\forall h \in (0, h_0)$ $P_h = \tilde{P}_h^*$, and $Q_h = \tilde{Q}_h^*$.

(H_{3.4}) $\exists C_6 > 0$ s.t. $\|B^* \tilde{P}_h \psi_h\|_U \leq C_6 h^{-\gamma s} \|\psi_h\|_{X_h}$, $\forall h \in (0, h_0)$, $\forall \psi_h \in X_h$.

$\forall h \in (0, h_0)$, soient $A_h^* : X_h \rightarrow X_h$ et $B_h^* : X_h \rightarrow U_h$ définis par

$$A_h^* = P_h A^* \tilde{P}_h, \text{ et } B_h^* = Q_h B^* \tilde{P}_h.$$



Retour



(H₄) On a les propriétés suivantes :

(H_{4.1}) La famille $e^{tA_h^*}$ est *uniformément analytique*, i.e., $\exists C_7 > 0$ t.q.

$$\|e^{tA_h}\|_{L(X_h)} \leq C_7 e^{\omega t}, \text{ et } \|A_h e^{tA_h}\|_{L(X_h)} \leq C_7 \frac{e^{\omega t}}{t}, \quad \forall t > 0. \quad (4)$$

(H_{4.2}) $\exists C_9 > 0$ t.q. $\forall f \in X, \forall h \in (0, h_0)$, les solutions respectives de $\hat{A}^* \psi = f$ et $\hat{A}_h^* \psi_h = P_h f$ vérifient

$$\|P_h \psi - \psi_h\|_{X_h} \leq C_9 h^s \|f\|_X. \quad (5)$$

En d'autres termes, $\|P_h \hat{A}^{*-1} - \hat{A}_h^{*-1} P_h\|_{L(X, X_h)} \leq C_9 h^s$
(hypothèse sur la vitesse de convergence).



Retour



Théorème (S. Labbé, E.T., *Syst. Cont. Letters*, 2006)

$\dot{y} = Ay + Bu$ est exactement contrôlable à zéro en temps $T > 0$
 \Leftrightarrow la famille $\dot{y}_h = A_h y_h + B_h u_h$ est *uniformément contrôlable* au sens où :

$\exists \beta, h_1, c, c' > 0 \mid \forall h \in (0, h_1), \forall \psi_h \in X_h,$

$$c \|e^{TA^*} \psi_h\|_{X_h}^2 \leq \int_0^T \|B_h^* e^{tA^*} \psi_h\|_{U_h}^2 dt + h^\beta \|\psi_h\|_{X_h}^2 \leq c' \|\psi_h\|_{X_h}^2.$$

Retour



Théorème (suite)

Dans ces conditions : $\forall y_0 \in X$, $\forall h \in (0, h_1)$, $\exists ! \psi_h \in X_h$
minimisant

$$J_h(\psi_h) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B_h^* e^{tA_h^*} \psi_h\|_{U_h}^2 dt + \frac{1}{2} h^\beta \|\psi_h\|_{X_h}^2 + \langle e^{TA_h^*} \psi_h, P_h y_0 \rangle_{X_h},$$

et la suite $(\tilde{Q}_h u_h)_{0 < h < h_1}$, où $u_h(t) = B_h^* e^{(T-t)A_h^*} \psi_h$, converge faiblement (à sous-suite près) dans $L^2(0, T; U)$ vers u tel que la solution vérifiant $y(T) = 0$ de

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad y(0) = y_0.$$

◀ Retour



Théorème (suite)

$\forall h \in (0, h_1)$, soit $y_h(\cdot)$ la solution de

$$\dot{y}_h = A_h y_h + B_h u_h, \quad y_h(0) = P_h y_0. \quad (4)$$

Alors,

- $y_h(T) = -h^\beta \psi_h$;
- $\forall t \in (0, T]$, $(\tilde{P}_h y_h(t))_{0 < h < h_1} \rightarrow y(t)$ (à sous-suite près) dans X .
- $\exists M > 0 \mid \forall h \in (0, h_1)$,

$$\int_0^T \|u_h(t)\|_{U_h}^2 dt \leq M^2 \|y_0\|_X^2, \quad h^\beta \|\psi_h\|_{X_h}^2 \leq M^2 \|y_0\|_X^2,$$

$$\text{et } \|y_h(T)\|_{X_h} \leq M h^{\beta/2} \|y_0\|_X.$$



Proposition

Si la suite $(\|\psi_h\|_{X_h})_{0 < h < h_1}$ est de plus bornée, alors le contrôle u est l'unique contrôle HUM tel que $y(T) = 0$.

Exemple

Cela arrive si A admet une base Hilbertienne de vecteurs propres e_k , de v.p. $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$, t.q. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{\lambda_k} < +\infty$, et pour

$$y_0 = \sum_{k \in \mathbf{N}} y_{0k} e_k \in X \text{ t.q. } y_{0k} \neq 0, \forall k \in \mathbf{N}.$$

Retour

