Stabilisation de systèmes de vibration en dimension infinie

Cheng-Zhong XU

Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés
Université Claude Bernard - Lyon 1, France

GDR MACS/GT EDP Réunion du 29 juin 2006, Lyon

Plan d'exposé

- Introduction, EDP, génie des procédés, mécanique
- Stabilité, contrôlabilité, observabilité, HUM
- Corde vibrante
- Poutre en rotation
- Conclusions

Plan d'exposé

- Introduction, EDP, génie des procédés, mécanique
- Stabilité, contrôlabilité, observabilité, HUM
- Corde vibrante
- Poutre en rotation
- Conclusions

Plan d'exposé

- Introduction, EDP, génie des procédés, mécanique
- Stabilité, contrôlabilité, observabilité, HUM
- Corde vibrante
- Poutre en rotation
- Conclusions

Plan d'exposé

- Introduction, EDP, génie des procédés, mécanique
- Stabilité, contrôlabilité, observabilité, HUM
- Corde vibrante
- Poutre en rotation
- Conclusions

Plan d'exposé

- Introduction, EDP, génie des procédés, mécanique
- Stabilité, contrôlabilité, observabilité, HUM
- Corde vibrante
- Poutre en rotation
- Conclusions

Corde vibrante

Commande et observation frontières non co-localisées

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, \ 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0,t) = 0, \quad w_x(1,t) = u(t), \\ y(t) = w_x(0,t), \end{cases} \tag{1}$$

- espace d'état $=H$

$$H = H_L^1 \times L^2(0,1), H_L^1 = \{f | f \in H^1(0,1), f(0) = 0\}$$

- espace d'entrée U et espace de sortie $Y = \mathbb{R}$.
- Système non co-localisé
- Aucune loi du type PI n'est stabilisante :

$$u = k_1 y + k_2 \int_0^t y(s) ds, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Corde vibrante

Commande et observation frontières non co-localisées

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, \ 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0,t) = 0, \quad w_x(1,t) = u(t), \\ y(t) = w_x(0,t), \end{cases} \tag{1}$$

- espace d'état $=H$

$$H = H_L^1 \times L^2(0,1), H_L^1 = \{f | f \in H^1(0,1), f(0) = 0\}$$

- espace d'entrée U et espace de sortie $Y = \mathbb{R}$.
- Système non co-localisé
- Aucune loi du type PI n'est stabilisante :

$$u = k_1 y + k_2 \int_0^t y(s) ds, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Corde vibrante

Commande et observation frontières non co-localisées

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, \ 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0,t) = 0, \quad w_x(1,t) = u(t), \\ y(t) = w_x(0,t), \end{cases} \tag{1}$$

- espace d'état $=H$

$$H = H_L^1 \times L^2(0,1), H_L^1 = \{f | f \in H^1(0,1), f(0) = 0\}$$

- espace d'entrée U et espace de sortie $Y = \mathbb{R}$.
- Système non co-localisé
- Aucune loi du type PI n'est stabilisante :

$$u = k_1 y + k_2 \int_0^t y(s)ds, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Corde vibrante

Commande et observation frontières non co-localisées

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, \; 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0,t) = 0, \quad w_x(1,t) = u(t), \\ y(t) = w_x(0,t), \end{cases} \tag{1}$$

- espace d'état $=H$

$$H = H_L^1 \times L^2(0,1), H_L^1 = \{f | f \in H^1(0,1), f(0) = 0\}$$

- espace d'entrée U et espace de sortie $Y = \mathbb{R}$.
- Système non co-localisé
- Aucune loi du type PI n'est stabilisante :

$$u = k_1 y + k_2 \int_0^t y(s)ds, \;\; k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Stabilisation via observateur

Observation mesurée $y(t) = w_x(0,t)$
$u(t) = -k\ w_t(1,t)$, $k > 0$, stabilise exponentiellement le système
On estime $w_t(1,t)$ par un observateur

$$\begin{cases} \widehat{w}_{tt}(x,t) - \widehat{w}_{xx}(x,t) = 0,\ 0 < x < 1, t > 0, \\ \widehat{w}_x(0,t) = \alpha \widehat{w}_t(0,t) + \beta \widehat{w}(0,t) + w_x(0,t), \\ \widehat{w}_x(1,t) = u(t) \end{cases} \tag{2}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont des constantes positives et l'espace d'état est $\mathcal{H} = H^1(0,1) \times L^2(0,1) \supset H$.

Bien-posé du système de l'observateur

Théorème 1. *Pour chaque* $u(\cdot), w_x(0,\cdot) \in L^2_{loc}(0,\infty)$ *et chaque condition initiale* $(\widehat{w}(\cdot,0), \widehat{w}_t(\cdot,0)) \in \mathcal{H}$*, l'équation (2) admet une unique solution* $(\widehat{w}, \widehat{w}_t) \in C(0,\infty;\mathcal{H})$*. De plus, pour tout* $T > 0$ *il existe une constante* $D_T > 0$ *dépendant de* T *seulement telle que*

$$\|(\widehat{w}(\cdot,T), \widehat{w}_t(\cdot,T))\|^2_{\mathbf{H}} \leq D_T \left\{ \|(\widehat{w}(\cdot,0), \widehat{w}_t(\cdot,0))\|^2_{\mathbf{H}} + \int_0^T \left[|u(\tau)|^2 + |w_x(0,\tau)|^2 \right] d\tau \right\}. \tag{3}$$

Convergence exponentielle de l'observateur

Théorème 2. *Soit* $(w(x,t), w_t(x,t))$ *solution régulière de la corde vibrante. Soit* $(\widehat{w}(x,t), \widehat{w}_t(x,t))$ *solution régulière de l'observateur. Alors la différence* $(e(x,t), e_t(x,t)) = (\widehat{w}(x,t), \widehat{w}_t(x,t)) - (w(x,t), w_t(x,t))$ *converge vers zéro exponetiellement dans l'espace d'état* $\mathcal{H}$ *:*

$$E(t) = \int_0^1 [|e_x(x,t)|^2 + |e_t(x,t)|^2] dx + \beta |e(1,t)|^2$$

$$\leq M e^{-\omega t} E(0).$$

Stabilisation par feedback dynamique

On construit la loi de feedback de la sortie basée sur l'état estimé

$$u(t) = -\alpha\, \widehat{w}_t(1,t).$$

Le système en boucle fermée est décrit par les EDP

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0,\ 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0,t) = 0, \\ w_x(1,t) = -\alpha\, \widehat{w}_t(1,t), \\ \widehat{w}_{tt}(x,t) - \widehat{w}_{xx}(x,t) = 0,\ 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ \widehat{w}_x(0,t) = \alpha\, \widehat{w}_t(0,t) + \beta\widehat{w}(0,t) + w_x(0,t), \\ \widehat{w}_x(1,t) = -\alpha\, \widehat{w}_t(1,t). \end{cases} \tag{4}$$

Stabilité du système global

Théorème 3. *Le système global étant bien posé est exponentiellement stable. De plus nous avons l'estimation des valeurs propres à grand module donnée par*

$$\begin{cases} \lambda_{1n} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right| + i\,n_\alpha\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \lambda_{2n} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right| + i\,n^\alpha\pi + o\left(\frac{1}{|n|}\right), \end{cases} \tag{5}$$

$$n_\alpha = \begin{cases} n - 1/2, \; 0 < \alpha < 1, \\ n, \; \alpha > 1, \end{cases}, \quad n^\alpha = \begin{cases} n, \; 0 < \alpha < 1, \\ n - 1/2, \; \alpha > 1. \end{cases} \tag{6}$$

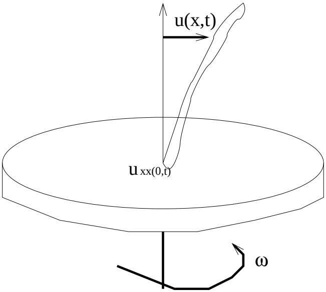
Le système en boucle fermée possède une suite de vecteurs propres qui forment une base de Riesz dans $X = H \times \mathcal{H}$.

Stabilization of the Rotating body-beam

Baillieul-Levi's model

control variable = torque

measured observation variable = $u_{xx}(0,t)$



Dynamical model of the Rotating body-beam

$$
\begin{aligned}
&\rho\, u_{tt}(x,t) + EI\ \ u_{xxxx}(x,t) = \rho\omega^2(t)u(x,t), 0 < x < 1,\\
&u(0,t) = u_x(0,t) = 0,\\
&u_{xx}(l,t) = 0,\\
&u_{xxx}(l,t) = 0,\\
&\tfrac{d}{dt}\{\omega(t)[I_d + \rho \textstyle\int_0^l u^2(x,t)\,dx]\} = \Gamma(t).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Equilibrium point $(0, \bar{\omega})$
Stabilizing state feedback law proposed by Coron and d'Anadréa-Novel

$$\gamma = -\left[\omega + \bar{\omega} - \sigma\left(\int_0^1 uu_t dx\right)\right] \int_0^1 uu_t dx$$

$$-c_1 \left[\omega - \bar{\omega} + \sigma\left(\int_0^1 uu_t dx\right)\right]$$

$$-\sigma'\left(\int_0^1 uu_t dx\right) \int_0^1 [u_t^2 - u_{xx}^2 + \omega^2 u^2] dx$$

where ω is measurable, however the state variable u and u_t are of infinite dimension and non measurable.

Infinite dimensional observers

Infinite dimensional state space X - Infinite dimensional Hilbert space
Finite or infinite dimensional control space U and observation space Y - Hilbert spaces
Vibrating System

- Wave equation
- Beam equation

State representation of the vibrating system

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = C\varphi(t)$$

Infinite dimensional observers

Infinite dimensional state space X - Infinite dimensional Hilbert space
Finite or infinite dimensional control space U and observation space Y - Hilbert spaces
Vibrating System

- Wave equation
- Beam equation

State representation of the vibrating system

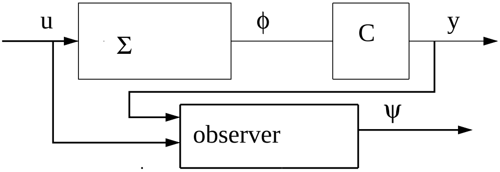
$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = C\varphi(t)$$

Kalman type observer

$$\dot{\psi} = [A - \kappa C^* C_\Lambda]\psi(t) + Bu(t) + \kappa C^* y(t), \quad \kappa > 0$$

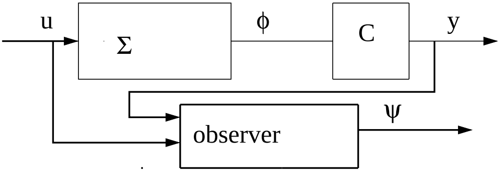
$$\psi(0) = \psi_0$$



Kalman type observer

$$\dot{\psi} = [A - \kappa C^* C_\Lambda]\psi(t) + Bu(t) + \kappa C^* y(t), \quad \kappa > 0$$

$$\psi(0) = \psi_0$$



Main result

Theorem

Let A be the generator of a C_0 unitary group on X. Assume that (A, C^*, C) is regular, (A, B, C) is regular and (A, C) is exactly observable. Then the observer system on X is exponentially stable for $0 < \kappa < 1/K_{\max}$. If some number $\kappa > 1/K_{\min}$ is an admissible feedback for the triple (A, C^*, C), then the corresponding observer system is exponentially unstable. The constants $K_{\max} \geq K_{\min} \geq 0$ are determined from the given system.

Exact observability and regularity of an infinite dimensional linear system

The pair (A, C) is called *exactly observable* if there exist some positive constants K and T such that, $\forall\ \phi_0$ in the domain of A,

$$K^{-1}\|\phi_0\|_X^2 \leq \int_0^T \|Ce^{tA}\phi_0\|_Y^2 dt \leq K\ \|\phi_0\|_X^2. \tag{8}$$

Regularity of (A, B, C)

The transfer function $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda C(\lambda - A)^{-1}(s - A)^{-1}B$ is well defined in some right half plane.

Constant angular velocity body-beam system

State representation equation

$$\begin{aligned} & u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = \omega_*^2 u(x,t), 0 < x < 1 \\ & u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \\ & u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = v_0(x) \\ & y(t) = u_{xx}(0,t) \end{aligned} \tag{9}$$

Kalman type observer for the body-beam system

Observer's state representation equation

$$\begin{aligned}
&\phi_{1t}(x,t) = \phi_2(x,t) - \kappa\, F(x)\Big[\phi_{1xx}(0,t) - y(t)\Big]\\
&\phi_{2t}(x,t) = -\phi_{1xxxx}(x,t) + \omega_*^2\phi_1(x,t)\\
&\phi_1(0,t) = \phi_{1x}(0,t) = \phi_{1xx}(1,t) = \phi_{1xxx}(1,t) = 0\\
&\phi_1(x,0) = \phi_1^0(x), \quad \phi_2(x,0) = \phi_2^0(x)
\end{aligned} \tag{10}$$

where $F(x)$ is the function which is the solution of the ordinary differential equation with boundary condition

$$\begin{aligned}
&F''''(x) = \omega_*^2 F(x)\\
&F(0) = F''(1) = F'''(1) = 0\\
&F'(0) = 1
\end{aligned} \tag{11}$$

Convergence of the Kalman type observer

Theorem

Assume that the constant ω_*^2 is smaller than the first eigenvalue l_1 of the fourth order derivative operator. Then the observer converges for every $\kappa > 0$: there exist some positive constants M and α such that

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi_1(\cdot,t) \\ \phi_2(\cdot,t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(\cdot,t) \\ u_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq M e^{-\alpha\, t} \left\| \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X .$$

Conclusions

Vibrating system
Kalman type observer
Stabilization via observers
near future perspectives:
Generalization to other vibrating systems
Numerical simulation